السلسلة رقم 3 في مقياس الرياضيات المالية

التمرين 1:

تم تعويض كمبيالة بتاريخ 01 أفريل قيمتها الاسمية 8500 دج قابلة للإستحقاق يوم 01 ماي بكمبيالة جديدة قابلة للإستحقاق يوم 30 ماي، بمعدل خصم 6%.

المطلوب:

* أحسب القيمة الاسمية للكمبيالة الجديدة.

التمرين 2:

لدى تاجر ثلاث كمبيالات تستحق بعد 30 يوم، 45 يوم، 70 يوم على التوالي. مع العلم أن القيمة الاسمية للكمبيالة الأولى والثانية متناسبتين مباشرة مع الأعداد 7 و5 على الترتيب، والكمبيالة الثالثة هي ضعف الكمبيالة الأولى.

لو عوضت هذه الكمبيالات الثلاث بكمبيالة جديدة مبلغها 20517 دج، تستحق بعد 90 يوم بمعدل خصم 9%.

المطلوب:

* أحسب المبالغ الإسمية لهذه الكمبيالات الثلاث؛

التمرين 3:

لدى تاجر ثلاث أوراق تجارية تشكل فيما بينها حدود متتالية هندسية مع العلم أن القيمة الاسمية للورقة الأولى تقدر بـ 2400 دج، حيث أن تواريخ استحقاق هذه الأوراق هي: 16 مارس، 11 أفريل، 20 ماي على الترتيب مع العلم أن تاريخ التكافؤ حدد يوم 16 مارس.

المطلوب:

1. حدد القيمة الاسمية للورقة الثانية والثالثة لو كان تاريخ الاستحقاق المتوسط يوم 24 أفريل؛
2. نفس السؤال السابق إذا كانت القيم الاسمية تشكل فيما بينها حدود متتالية حسابية.

التمرين 4:

على تاجر دين مبلغه 33150 دج اقترح عليه تسديد 20% مباشرة والباقي بواسطة 18 ورقة تجارية متساوية القيمة الاسمية تستحق شهريا بمعدل خصم 10%.

المطلوب:

1. احسب القيمة الاسمية للأوراق التجارية؛
2. احسب تاريخ الاستحقاق المتوسط لهذه الأوراق.

حل السلسلة الثالثة:

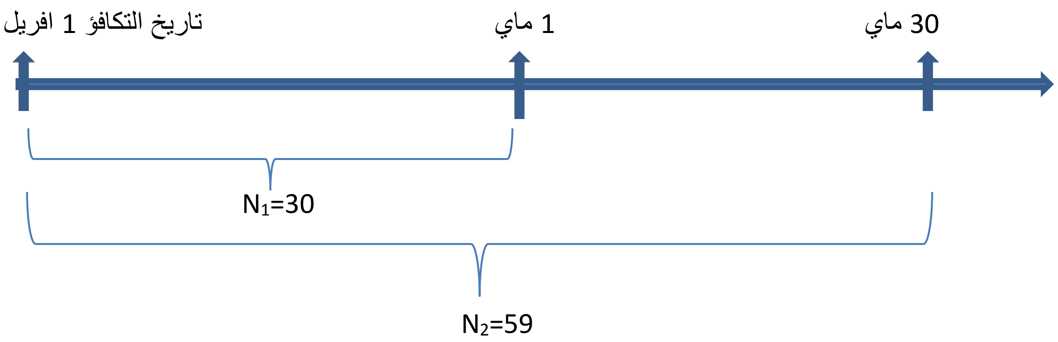
التمرين 01:

لدينا:

* الكمبيالة الأولى تاريخ إستحقاقها 1 أفريل وقيمتها الإسمية 8500؛

* الكمبيالة الثانية تاريخ إستحقاقها 30 ماي وقيمتها الإسمية مجهولة؛

* معدل للخصم 6٪ .



1. حساب القيمة الاسمية للكمبيالة الجديدة

$$D=\frac{36000}{t}=\frac{36000}{6}=6000$$

شرط التكافؤ: $a_1=a_2 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

علما أن: $a=v\left(\frac{D-n}{D}\right)$

ومنه تصبح العلاقة (1) كما يلي:

$$v_1\left(\frac{D-n_1}{D}\right)=v_2\left(\frac{D-n_2}{D}\right)$$

$$\Leftrightarrow 8500\left(\frac{6000-30}{6000}\right)=v_2\left(\frac{6000-59}{6000}\right)$$

$$\Leftrightarrow 8500(0.995)=v_2(0.99016666)$$

$$\Rightarrow v_2=8541.491331$$

التمرين02:

1.حساب المبالغ الإسمية للكمبيالات الثلاث:

لدينا:

$$n_1=30\,,\qquad n_1=45,\qquad n_1=70$$

$$D = \frac{36000}{t} = \frac{36000}{9} = 4000$$

$$V' = 20517 \text{ و } \qquad n' = 90 \text{ و } \qquad V_3 = 2V_1 \text{ و } \qquad \frac{V_1}{7} = \frac{V_2}{5}$$

$$a' = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\Leftrightarrow V'\left(\frac{D - n'}{D}\right) = V_1\left(\frac{D - n_1}{D}\right) + V_2\left(\frac{D - n_2}{D}\right) + V_3\left(\frac{D - n_3}{D}\right)$$

نقسم طرفي المعادلة على D نتحصل على:

$$V'(D - n') = V_1(D - n_1) + V_2(D - n_2) + V_3(D - n_3)$$

يتم تعويض القيم المعطاة سابقا نجد:

$$20517(4000 - 90) = V_1(4000 - 30) + V_2(4000 - 45) + V_3(4000 - 70)$$

$$80221470 = V_1 3970 + V_2 3955 + V_3 3930 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

لدينا: $V_3 = 2V_1$ و $\frac{V_1}{7} = \frac{V_2}{5} \Rightarrow V_2 = 5\frac{V_1}{7}$

$$(1) \Leftrightarrow 80221470 = V_1 3970 + \frac{5V_1}{7} 3955 + 2V_1 3930$$

$$\Leftrightarrow 80221470 = V_1(3970 + \frac{5}{7}3955 + 2 \times 3930)$$

$$\Rightarrow 80221470 = V_1 14655$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{80221470}{14655} = 5474$$

ومنه:

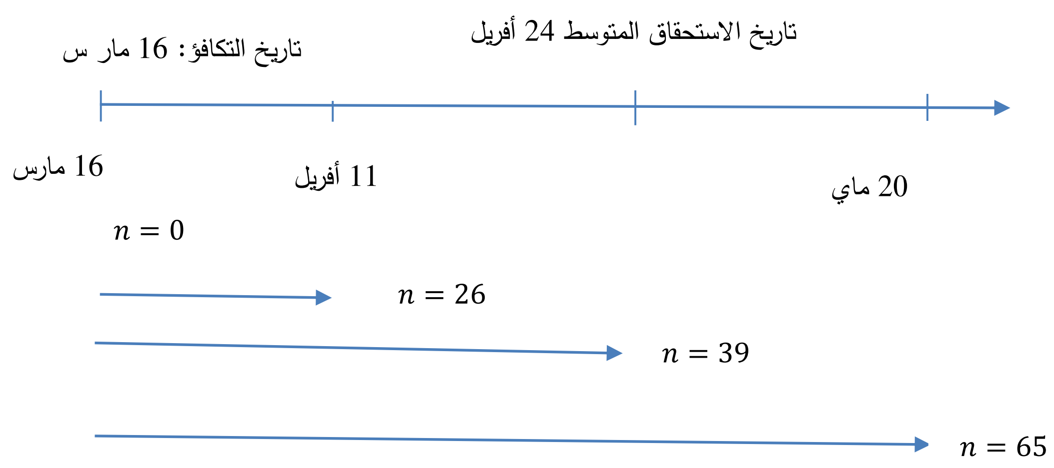
$$V_2 = 3910$$

$$V_3 = 10948$$

التمرين 03:

1.تحديد القيم الإسمية للورقة الثانية والثالثة

لدينا: تواريخ الاستحقاق على التوالي هي 16 مارس، 11 أفريل، 20 ماي



نعلم أن الأوراق التجارية الثلاث قيمها الأسمية تشكل فيما بينها حدود متتالية هندسية، بمعنى:

$$V_1 = 2400$$

$$V_2 = 2400 \times q$$

$$V_3 = 2400 \times q^2$$

نعلم أيضا أن تاريخ الاستحقاق المتوسط هو 24 أفريل $n = 39$ ومنه:

لدينا:

$$n = \frac{\sum_{i=1}^{n} V_i.n_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i}$$

$$\Leftrightarrow 39 = \frac{\sum_{i=1}^{n} V_i.n_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i} = \frac{(V_1n_1 + V_2n_2 + V_3n_3)}{(V_1 + V_2 + V_3)} = \frac{(2400 \times 0 + 2400 \times q \times 26 + 2400 \times q^2 \times 65)}{(2400 + 2400 \times q \times +2400 \times q^2)}$$

$$\Leftrightarrow 39 = \frac{62400 \times q + 156000 \times q^2}{2400(1 + q + q^2)}$$

$$39 = \frac{26q + 65q^2}{1 + q + q^2} \Rightarrow 39 + 39q + 39q^2 = 26q + 65q^2 \Rightarrow 26q^2 - 13q - 39 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 13^2 - 4\big(26 * (-39)\big) = 4225$$

$$\sqrt{\Delta} = 65$$

$$q = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{13 + 65}{2.26} = 1.5$$

$$q' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{13 - 65}{2.26} = -1$$

الحل المقبول هو $q = 1.5$

الأوراق التجارية قيمها الأسمية تشكل فيما بينها حدود متتالية هندسية أساسها $q = 1.5$، ومنه:

$$V_1 = 2400$$

$$V_2 = 2400 \times 1.5 = 3600$$

$$V_3 = 2400 \times 1.5^2 = 5400$$

2. تحديد القيم الإسمية للورقة الثانية والثالثة علما أن الأوراق التجارية الثلاث قيمها الأسمية تشكل فيما بينها حدود متتالية حسابية، بمعنى:

$$V_1 = 2400$$
$$V_2 = 2400 + r$$

$$V_3 = 2400 + 2r$$

$$n = \frac{\sum_{i=1}^{n} V_i.n_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i}$$

$$\Leftrightarrow 39 = \frac{\sum_{i=1}^{n} V_i.n_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i} = \frac{(V_1n_1 + V_2n_2 + V_3n_3)}{(V_1 + V_2 + V_3)} = \frac{(2400 \times 0 + (2400 + r) \times 26 + (2400 \times 2r) \times 65)}{(2400 + 2400 + r + 2400 + 2r)}$$

$$\Leftrightarrow 39 = \frac{218400 + 156r}{3.2400 + 3r}$$

$$39=\frac{218400+156r}{3.2400+3r}\Rightarrow 39(7200+3r)=218400+156r\Rightarrow 62400=39r\Rightarrow\ r=\frac{62400}{39}=1600$$

أي أن أساس المتتالية هو $r=1600$

الأوراق التجارية الثلاث قيمها الأسمية تشكل فيما بينها متتالية حسابية، وعليه فإن:

$$V_1=2400$$

$$V_2=2400+1600=4000$$

$$V_3=2400+2\times 1600=5600$$

التمرين 04:

1.حساب القيم الاسمية:

لدينا الفترة بالأشهر ومنه: $D=\frac{1200}{t}=\frac{1200}{10}=120$

$$a'=a_1+a_2+a_3+\cdots.+a_{18}$$

$$\Leftrightarrow 33150=6630+V_1\left(\frac{D-n_1}{D}\right)+V_2\left(\frac{D-n_2}{D}\right)+\cdots\ldots+V_{18}\left(\frac{D-n_{18}}{D}\right)\ldots\ldots\ldots..(1)$$

نعلم أن القيم الإسمية متساوية وعليه:

$$(1)\Leftrightarrow 33150=6630+V\left(\frac{D-n_1}{D}\right)+V\left(\frac{D-n_2}{D}\right)+\cdots\ldots+V\left(\frac{D-n_{18}}{D}\right)$$

$$\Leftrightarrow 26520=V\left(\frac{D-n_1}{D}\right)+V\left(\frac{D-n_2}{D}\right)+\cdots\ldots+V\left(\frac{D-n_{18}}{D}\right)$$

$$\Leftrightarrow 26520=V\left(\frac{120-1}{120}\right)+V\left(\frac{120-2}{120}\right)+V\left(\frac{120-3}{120}\right)\ldots\ldots+V\left(\frac{120-18}{120}\right)$$

$$\Leftrightarrow 26520=\frac{V}{120}[120\times 18+(1+2+3+\cdots 18)]$$

$$\Leftrightarrow 26520=\frac{V}{120}(2160+171)$$

$$\Rightarrow V=1600$$

أي $V_1=V_2=V_3=\cdots=V_{18}=1600$

2.حساب تاريخ الاستحقاق المتوسط:

لدينا:

$$n=\frac{\sum_{i=1}^{n}V_i.n_i}{\sum_{i=1}^{n}V_i}=\frac{(V_1n_1+V_2n_2+V_3n_3+\cdots+V_{18}n_{18})}{(V_1+V_2+V_3+\cdots V_{18})}$$

$$\Leftrightarrow n=\frac{1\times 1600+2\times 1600+3\times 1600+\cdots+18\times 1600}{18\times 1600}=\frac{1600\times(1+2+3\ldots.+18)}{1600\times 18}=9.5$$

هذا يعني أن تاريخ الاستحقاق المتوسط يكون بعد تسعة أشهر ونصف.

السلسلة رقم 4 في مقياس الرياضيات المالية

التمرين 1:

وظف أحد الأشخاص في بنك مبلغ 50000 دج بمعدل فائدة مركبة سنوي، وبعد سنتين من التوظيف سحب مبلغ 40000 دج، ثم سنتين من بعد هذا السحب وفي حالة إضافة مبلغ 631.55 دج فإن رصيده بلغ 22000 دج.

المطلوب:

1. أحسب المعدل السنوي للتوظيف؛
2. لو وظف الرصيد المتحصل في بنك آخر بمعدل فائدة يفوق معدل التوظيف الأول بـ 0.25 % لمدة 5 سنوات:

*أحسب الفائدة الإجمالية؛

*احسب فائدتي السنة الثالثة والخامسة.

التمرين 2:

تم توظيف المبلغ C لمدة 8 سنوات بمعدل فائدة معين، إذا كانت النسبة بين مجموع فوائد السنوات الثلاثة الأولى ومجموع فوائد السنوات الثلاثة الأخيرة تقدر بـ 0.635228.

المطلوب:

* أحسب معدل التوظيف؛

التمرين 3:

وظف مبلغ معين لمدة ما بفائدة مركبة وبمعدل فائدة سنوي، إذا علمت أنه لو تم توظيف هذا المبلغ بعامين أكبر من التوظيف العادي فإن الفائدة سترتفع بمبلغ 27921.3 دج، وإذا وظف بعامين أقل من التوظيف العادي فإن الفائدة ستنخفض بمبلغ 24387.56 دج.

المطلوب:

1. أحسب معدل التوظيف؛
2. أحسب مدة التوظيف إذا كان المبلغ الموظف 100000 دج.

التمرين 4:

وظفت مؤسسة " مجدو" مبلغ C لمدة 7 سنوات بفائدة مركبة بمعدل معين.

المطلوب:

1. عبر عن: c_1، c_2 ، c_3، c_4، c_5 ، c_6، c_7، بدلالة C وi؛
2. إذا كان:

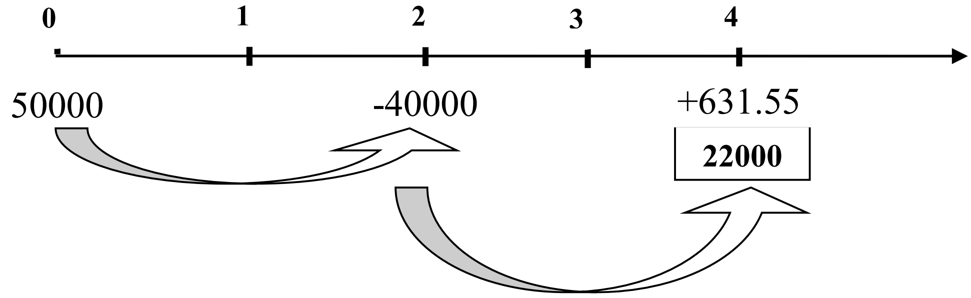
$$c_4 - c_1 = 14024.448$$
$$c_7 - c_1 = 31691.21344$$

* أحسب معدل التوظيف؛
* أحسب المبلغ الموظف؛
* أحسب الفائدة الإجمالية.

حل السلسلة الرابعة:

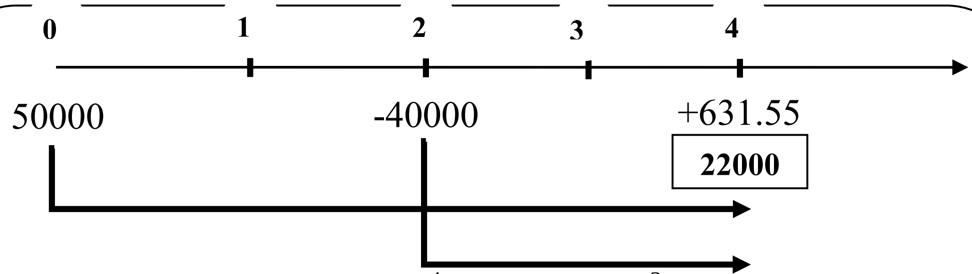
التمرين :01

1. حساب المعدل السنوي:



$$[50000(1+i)^2 - 40000]\,(1+i)^2 + 631.55 = 22000$$

أو



$$50000(1+i)^4 - 40000\,(1+i)^2 + 631.55 = 22000$$

وبالتالي:

$$50000(1+i)^4 - 40000(1+i)^2 + 631.55 - 22000 = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$$

بوضع: $(1+i)^2 = x$ فإن العلاقة (1) تصبح كما يلي:

$$50000x^2 - 40000x - 21368.45 = 0$$

بالقسمة على (10000) نجد:

$$5x^2 - 4x - 2.136845 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 5 \times (-2.136845) = 58.7369$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = 7.664$$

ومنه للمعادلة حلين متمايزين هما:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-7.664}{10} = -0.3664 \quad \text{وهو مرفوض}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+7.664}{10} = 1.1664 \quad \text{وهو مقبول}$$

وبالرجوع إلى قيمة X نجد:

$$x = 1.1664 \Rightarrow (1+i)^2 = 1.1664 \Rightarrow (1+i) = \sqrt{1.1664} = 1.08 \Rightarrow i = 0.08 \Rightarrow i\% = 8\%$$

2.حساب الفائدة الإجمالية:

لدينا:

$$i = 8\% + 0.25\% = 8.25\% \qquad c = 22000 \qquad I = ? \qquad n = 5$$

ومنه:

$$I = c[(1+i)^n - 1] = 22000[(1.0825)^5 - 1] = 10701.08$$

أو:

$$I = c_n - c = 22000(1.0825)^5 - 22000 = 10701.08$$

3.حساب فائدتي السنة الثالثة والخامسة:

$$I_n = c(1+i)^{n-1} \times i \Rightarrow I_3 = c(1+i)^2 \times i = 22000(1.0825)^2 \times 0.0825 = 2126.828344$$

$$I_5 = c(1+i)^4 \times i = 22000(1.0825)^4 \times 0.0825 = 2492.230746$$

التمرين 02:

1.حساب معدل التوظيف

لدينا:

$$\frac{\mathrm{I}_3}{\mathrm{I}_8 - \mathrm{I}_5} = 0.635228$$

$$\Leftrightarrow \frac{c[(1+i)^3 - 1]}{c[(1+i)^8 - 1] - c[(1+i)^5 - 1]} = 0.635228$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+i)^3 - 1}{(1+i)^8 - 1 - (1+i)^5 + 1} = 0.635228$$

$$\Leftrightarrow \frac{[(1+i)^3 - 1]}{(1+i)^8 - (1+i)^5} = 0.635228$$

$$\Leftrightarrow \frac{[(1+i)^3 - 1]}{(1+i)^5[(1+i)^3 - 1]} = 0.635228$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(1+i)^5} = 0.635228$$

$$\Rightarrow (1+i)^5 = 1.5742379 \Rightarrow (1+i) = \sqrt[5]{1.5742379} = 1.0949$$

$$\Rightarrow i\% \approx 9.5\%$$

التمرين 03:

1.حساب معدل التوظيف:

لدينا:

$$I_n = C[(1+i)^n - 1] \qquad I_{n-2} = C[(1+i)^{n-2} - 1] \qquad I_{n+2} = C[(1+i)^{n+2} - 1]$$

$$I_{n+2} - I_n = C[(1+i)^{n+2} - 1] - C[(1+i)^n - 1] = 27921.32$$

$$\Leftrightarrow I_{n+2} - I_n = C[(1+i)^{n+2} - (1+i)^n] = 27921.3 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

$$I_n - I_{n-2} = C[(1+i)^n - 1] - C[(1+i)^{n-2} - 1] = 24387.56$$

$$\Leftrightarrow I_n - I_{n-2} = C[(1+i)^n - (1+i)^{n-2}] = 24387.56 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots .. (2)$$

بقسمة 1 على 2 نجد:

$$\frac{C[(1+i)^{n+2} - (1+i)^n]}{C[(1+i)^n - (1+i)^{n-2}]} = \frac{(1+i)^{n-2}[(1+i)^4 - (1+i)^2]}{(1+i)^{n-2}[(1+i)^2 - 1]} = \frac{27921.32}{24387.56}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+i)^2[(1+i)^2 - 1]}{[(1+i)^2 - 1]} = \frac{27921.32}{24387.56} = 1.144899$$

$$\Leftrightarrow (1+i)^2 = 1.144899$$

$$\Leftrightarrow (1+i) = 1.06999 \approx 1.07$$

$$i\% = 7\%$$

2.حساب مدة التوظيف:

لدينا: C=100000

من العلاقة (1) نجد:

$$100000[(1.07)^{n+2} - (1.07)^n] = 27921.32$$

$$\Leftrightarrow (1.07)^n[(1.07)^2 - 1] = 0.2792132$$

$$\Leftrightarrow (1.07)^n = 1.926937$$

$$\Leftrightarrow n \times 0.067568 = 0.655931$$

$$\Rightarrow n = 9.69 \text{ سنة}$$

لدينا:

1سنة ⟵ 12شهر

0.69 سنة ⟵ x

$x = 2.28$ شهر

1 شهر ⟵ 30يوم

0.28 شهر ⟵ x

$x = 8$ أيام

وعليه فإن المدة هي: 9 سنوات و8أشهر و8أيام

التمرين 04:

لدينا: $n = 7$

$$C_1 = C(1+i) \quad , C_2 = C(1+i)^2 \quad , C_3 = C(1+i)^3 \quad , C_4 = C(1+i)^4 \quad , C_5 = C(1+i)^5,$$

$$C_6 = C(1+i)^6, \qquad C_7 = C(1+i)^7$$

1.حساب معدل التوظيف:

$$C_4 - C_1 = 14024.448 \Leftrightarrow C(1+i)^4 - C(1+i) = 14024.448$$
$$\Leftrightarrow C(1+i)[(1+i)^3 - 1] = 14024.448 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$C_7 - C_1 = 31691.21344 \overset{\rightarrow}{\Leftrightarrow} C(1+i)^7 - C(1+i) = 31691.21344$$
$$\Leftrightarrow C(1+i)[(1+i)^6 - 1] = 31691.21344 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

بقسمة 2على 1 نجد:

$$\frac{C(1+i)\quad[(1+i)^6 - 1]}{C(1+i)\quad[(1+i)^3 - 1]} = \frac{31691.21344}{14024.448}$$

$$\Leftrightarrow \frac{[(1+i)^3]^2 - 1^2}{(1+i)^3 - 1} = \frac{[(1+i)^3 - 1][(1+i)^3 + 1]}{[(1+i)^3 - 1]} = 2.259712$$
$$\Leftrightarrow (1+i)^3 + 1 = 2.259712 \Rightarrow (1+i)^3 = 1.259712$$
$$\Leftrightarrow 3\ln(1+i) = \ln 1.259712 \Rightarrow \ln(1+i) = \frac{0.230883}{3}$$
$$\Leftrightarrow \ln(1+i) = 0.076961 \Rightarrow (1+i) = e^{0.076961} \rightarrow (1+i) = 1.08$$
$$\Leftrightarrow i = 1.08 - 1 = 0.08$$
$$\Leftrightarrow i = 8\%$$

أو:

$$i = \left(\sqrt[3]{1.259712} - 1\right) \times 100$$
$$\Leftrightarrow i = (1.08 - 1) \times 100 = 8\%$$

2. 1.حساب المبلغ الموظف:

لدينا:

$$c_4 - c_1 = 14024.448 \Leftrightarrow C(1+0.08)^4 - C(1+0.08) = 14024.448$$

$$\Leftrightarrow C[(1.08)^4 - (1.08)] = 14024.448$$

$$\Leftrightarrow C(1.08)[(1.08)^3 - 1] = 14024.448$$

$$\Leftrightarrow C(1.08) = 54000$$

$$\Rightarrow C = 50000$$

2.2.حساب الفائدة الإجمالية:

لدينا:

$$I = C[(1+i)^7 - 1]$$
$$\Leftrightarrow I = 50000[(1.08)^7 - 1] = 50000(0.0713824) \Rightarrow I = 35691.2$$

السلسلة رقم 5 في مقياس الرياضيات المالية

التمرين 1:

وظف أحد الأشخاص في بنك مبلغ 100000 دج بمعدل فائدة مركبة سنوي، وبعد 3 سنوات من التوظيف تحصل على رصيد قدره 130000 دج.

المطلوب:

1. أحسب المعدل السنوي للتوظيف؛
2. لو وظف الرصيد المتحصل عليه في بنك آخر بمعدل فائدة مركبة قدره 6.5% لمدة معينة من السنوات وتحصل على رصيد قدره 156000 دج.

   *أحسب مدة التوظيف.

التمرين 2:

قامت إحدى المؤسسات بتوظيف مبلغ 200000 دج لمدة 470 يوم بفائدة بسيطة بمعدل معين (السنة=365 يوم). إذا علمت أن الفائدة الناتجة عن هذا التوظيف تساوي فائدة السنة السادسة لو وظف هذا المبلغ بفائدة مركبة بالمعدل نفسه.

المطلوب:

1. أحسب معدل التوظيف؛
2. أحسب معدل التوظيف بالفائدة المركبة.

التمرين 3:

ثلاثة رؤوس أموال متساوية، وظفت بفائدة مركبة لمدة ثلاث سنوات وفق الشروط التالية:

*رأس المال الأول بمعدل فائدة سنوي 10% (الرسملة سنوية)؛

*رأس المال الثاني بمعدل فائدة سداسي 5% (الرسملة سداسية)؛

*رأس المال الأول بمعدل فائدة ثلاثي 2.5% (الرسملة ثلاثية)؛

المطلوب:

1. إعتمادا على مدة التوظيف، الفرق بين الفوائد الناتجة بالنسبة لرأس المال الأول ورأس المال الثاني هي 272.88 دج. أحسب القيمة المتساوية لرؤوس الأموال؛
2. أحسب الفرق بين الفوائد الناتجة بالنسبة لرأس المال الثاني ورأس المال الثالث.
3. بأي معدل فائدة بسيطة يمكن توظيف رأس المال الأول لمدة 3 سنوات حتى تتحصل على الجملة نفسها بالفائدة المركبة والفائدة البسيطة؟ مع العلم أن معدل الفائدة المركبة 10% سنويا.

حل السلسلة رقم (05):

التمرين 01:

1.حساب المعدل السنوي للتوظيف:

لدينا: $c = 100000, \quad c_n = 130000\,, \quad n = 3\;, \;\; i = ?$

$$\boldsymbol{c_n} = c(1+i)^n \Rightarrow 130000 = 100000(1+i)^3 \Rightarrow 1.3 = (1+i)^3$$

لحساب المعدل i هناك عدة طرق هي:

ط1: $(1+i) = \sqrt[3]{1.3} \Rightarrow i = \left(\sqrt[3]{1.3} - 1\right) \times 100 = 9.14\%$

ط2: $(1+i) = (1.3)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow i = \left((1.3)^{\frac{1}{3}} - 1\right) \times 100 = 9.14\%$

ط3: $(1+i)^3 = 1.3 \Rightarrow 3\ln(1+i) = \ln 1.3 \Rightarrow \ln(1+i) = \frac{\ln 1.3}{3} \Rightarrow \ln(1+i) = 0.0874547$

$$\Rightarrow (1+i) = e^{0.0874547} \Rightarrow i = (e^{0.0874547} - 1) \times 100 \Rightarrow i = 9.14\%$$

2.حساب مدة التوظيف n:

لدينا: $c = 130000\,, \quad c_n = 156000\;, \quad i\% = 6.5\,\%\;\;;\;\; n = ?$

ومنه: $156000 = 130000(1.065)^n \Rightarrow 1.2 = (1.065)^n$

$$\Leftrightarrow \ln 1.2 = n \ln 1.065 \Rightarrow 0.182321 = n \times 0.062974 \Rightarrow n = 2.89$$

أي أن: 1سنة $\rightarrow 12$ شهر

$0.89 \rightarrow x$ شهر

ومنه: $x = 10.68$ شهر

1 شهر $\rightarrow 30$ يوم

x يوم $\rightarrow 0.68$

ومنه: $x = 20$ يوم

ومنه المدة هي: سنتان(2) و10 أشهر و20 يوما.

التمرين02:

1.حساب معدل التوظيف:

لدينا: $c = 200000 \quad , \quad n = 470$ يوم

$$I = \frac{c \times t \times n}{36500}$$

$$I_n = c(1+i)^{n-1} \times i$$

ومنه:

$$I_6 = c(1+i)^5 \times i$$

لدينا: $I = I_6$

منه: $\frac{c \times t \times n}{36500} = c(1+i)^5 \times i \ldots\ldots\ldots (1)$

وعلما أن: $\frac{t}{100} = i$

فإن العلاقة (1) تصبح كما يلي:

$$\frac{n}{365} = (1+i)^5$$

أي:

$$\frac{470}{365} = (1+i)^5 \Rightarrow 1.287671 = (1+i)^5$$

ولإيجاد قيمة i هناك عدة طرق هي:

ط1: $(1+i) = \sqrt[5]{1.287671} \Rightarrow i = \left(\sqrt[5]{1.287671} - 1\right) \times 100 = 5.18\%$

ط2: $(1+i) = (1.287671)^{\frac{1}{5}} \Rightarrow i = \left((1.287671)^{\frac{1}{5}} - 1\right) \times 100 = 5.18\%$

ط3: $\ln(1.287671) = 5\ln(1+i) \Rightarrow 0.050567 = \ln(1+i)$

ومنه: $(1+i) = e^{0.050567} \Rightarrow i = (e^{0.050567} - 1) \times 100 = 5.18\%$

2.حساب المدة n:

لدينا: $I = \frac{c \times t \times n}{36500} = \frac{200000 \times 5.18 \times 470}{36500} = 13340.27$

$$\mathrm{I} = c[(1+i)^n - 1] \Rightarrow 13340.27 = 200000[(1.0518)^n - 1]$$

$$\Rightarrow 0.66701 = (1.0518)^n - 1 \Rightarrow 1.066701 = (1.0518)^n$$

$$\ln(0.66701) = n\ln(10518) \Rightarrow n = 1.277 \approx 1.28$$

أي أن المدة هي سنة و3 أشهر و11 يوما.

التمرين03:

1.حساب القيمة المتساوية لرؤوس الأموال:

لدينا: $c_1 = c_2 = c_3 = c$

*الرسملة سنوية يعني المعدل سنوي والمدة سنوية؛

*الرسملة سداسية يعني المعدل سداسي والمدة سداسية؛

*الرسملة ثلاثية يعني المعدل ثلاثي والمدة ثلاثية.

نلاحظ أن المعدلات متناسبة:

$$\begin{aligned} IC_2 - IC_1 &= c[(1.05)^6 - 1] - c[(1.1)^3 - 1] \\ &= c(1.05)^6 - c - c(1.1)^3 + c \\ &= c(1.05)^6 - c(1.1)^3 \\ 272.88 &= c[(1.05)^6 - (1.1)^3] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c = 30000$$

2.حساب الفرق بين فائدتي رأس المال الثالث والثاني:

$$\begin{aligned} Ic_3 - Ic_2 &= 30000[(1.025)^{12} - 1] - 30000[(1.05)^6 - 1] \\ &= 143.8 \end{aligned}$$

3.حساب معدل الفائدة البسيطة:

لدينا: الفائدة المركبة: $c_n = c(1+i)^n$

الفائدة البسيطة: $I = \frac{c\times t\times n}{100}$; $c_n = c + I = c\left(1 + \frac{t\times n}{100}\right)$

الجملتان متساويتان ومنه:

$$c\left(1 + \frac{t \times n}{100}\right) = c(1+i)^n$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{t \times n}{100} = (1+i)^n \Rightarrow 1 + \frac{t \times n}{100} = (1.1)^3 = 1.331$$

$$1 + \frac{3t}{100} = 1.331 \Rightarrow \frac{3t}{100} = 0.331 \Rightarrow 3t = 33.1 \Rightarrow t = 11.033$$

السلسلة رقم 6 في مقياس الرياضيات المالية

التمرين 1:

ثلاث قيم اسمية تشكل فيما بينها حدود متتالية هندسية متزايدة أساسها 2، عند خصمها بمعدل معين لمدة 6 سنوات فإن مجموع قيمها الحالية 13058.76 دج، وإذا خصمت بالمعدل السابق لمدة 8 سنوات فإن مجموع قيمها الحالية 11844.68 دج.

المطلوب:

1. أحسب معدل الخصم ثم القيم الإسمية الثلاثة؛
2. أحسب مبلغ الخصم المركب لكل مبلغ.

التمرين 2:

دينين تربطهما العلاقة الرياضية الآتية:

$$\ln v_1 + \ln v_2 = 17.72753356$$
$$\ln v_1 - \ln v_2 = 0.69314718$$

الدين الأول يستحق بعد 10 سنوات، والدين الثاني يستحق بعد 3 سنوات.

المطلوب:

* ماهو معدل الخصم الذي يؤدي إلى تكافئهما الآن؟

التمرين 3:

1. مبلغ قدره 750000 دج وزع على 5 أشخاص، حصصهم تشكل متتالية حسابية متناقصة، مع العلم أن حصة الشخص الأول 200000دج. أحسب هذه الحصص.

2. الشخص الأول وظف حصته بمعدل 5% بفائدة مركبة لمدة معينة وتحصل على فائدة قدرها 81420 دج. أحسب مدة التوظيف.

3. الشخص الثاني أراد شراء منزل بمبلغ 500000 دج، دفع ما يملك مباشرة، والباقي سدده بورقتين ماليتين متساويتي القيمة الاسمية، الأولى تستحق بعد 4 سنوات والثانية بعد 6 سنوات، بمعدل خصم 6%. أحسب القيمتين الاسميتين.

4. الشخص الثالث أراد شراء آلة بمبلغ 350000 دج دفع ما يملك مباشرة، والباقي سدده بواسطة 6 أوراق مالية قيمها الاسمية تشكل فيما بينها حدود متتالية هندسية أساسها 1.2، الأولى تستحق بعد سنتين، والثانية بعد أربع سنوات، وهكذا ...(كل سنتين لباقي الأوراق)، بمعدل خصم 6%. أحسب القيم الإسمية للأوراق المالية.

حل السلسلة رقم (6):

التمرين01:

1.حساب معدل الخصم(i):

لدينا: $v_1, v_2 = v_1\, q, v_3 = v_1 q^2$

حدود متتالية هندسية.

$$a_1 + a_2 + a_3 = 13058.76$$
$$a = v(1+i)^{-n}$$

لما: $n = 6$

$$v_1(1+i)^{-6} + v_2(1+i)^{-6} + v_3(1+i)^{-6} = 13058.76$$
$$v_1(1+i)^{-6} + 2v_1(1+i)^{-6} + 4v_1(1+i)^{-6} = 13058.76$$
$$7v_1(1+i)^{-6} = 13058.76 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

لما: $n = 8$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 11844.68$$
$$v_1(1+i)^{-8} + v_2(1+i)^{-8} + v_3(1+i)^{-8} = 11844.68$$
$$7v_1(1+i)^{-8} = 11844.68 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

بقسمة (2) على (1) نجد:

$$\frac{7v_1(1+i)^{-8}}{7v_1(1+i)^{-6}} = \frac{11844.68}{13058.76} = 0.907$$

$$(1+i)^{-8}(1+i)^{6} = (1+i)^{-2} = 0.907 \Rightarrow i\% = 5\%$$

2.حساب رؤوس الأموال الثلاثة:

من المعادلة (1) نجد:

$$7v_1(1+i)^{-6} = 13058.76$$

$$7v_1(1.05)^{-6} = 13058.76 \Rightarrow v_1 = 2500$$

ومنه $v_2 = 5000$ و $v_3 = 10000$

3.حساب مبلغ الخصم المركب :

لما: $n = 6$

$$e = v[1-(1+i)^{-n}]$$

$$e_1 = 2500\,[1-(1.05)^{-6}] = 634.46$$

$$e_2 = 5000\,[1-(1.05)^{-6}] = 1268.92$$

$$e_3 = 10000\,[1-(1.05)^{-6}] = 2537.84$$

لما: $n = 8$

$$e_1 = 2500\,[1-(1.05)^{-8}] = 807.90$$

$$e_2 = 5000\,[1-(1.05)^{-8}] = 1615.80$$

$$e_3 = 10000\,[1-(1.05)^{-8}] = 3231.60$$

التمرين 02:

1.حساب الدينين:

لدينا:

$$\ln v_1 + \ln v_2 = 17.72753356 \ldots\ldots\ldots (1)$$
$$\ln v_1 - \ln v_2 = 0.69314718 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

بجمع (1) و(2) نجد:

$$2\ln v_1 = 18.42068074$$

$$\ln v_1 = 9.21034037 \Rightarrow v_1 = e^{9.21034037}$$

ومنه: $v_1 = 10000$ و $v_2 = 5000$

2.حساب معدل الخصم:

$$a_1 = a_2$$

$$v_1(1+i)^{-n_1} = v_2(1+i)^{-n_2}$$

$$10000(1+i)^{-10} = 5000(1+i)^{-3}$$

$$2(1+i)^{-10} = (1+i)^{-3} \Rightarrow (1+i)^{-10} = \frac{1}{2}(1+i)^{-3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+i)^{-10}}{(1+i)^{-3}} = 0.5 \Rightarrow (1+i)^{-7} = 0.5$$

$$\Leftrightarrow (1+i) = \sqrt[-7]{0.5} \Rightarrow i = \sqrt[-7]{0.5} - 1 \times 100$$

ومنه: $$i = 10.4\%$$

التمرين3:

1.حساب الحصص:

لدينا: $$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = 750000 \ldots\ldots\ldots (1)$$

وبما أنها حدود متتالية حسابية متناقصة فهذا يعني:

$$c_1, \qquad c_2 = c_1 - r, \qquad c_3 = c_1 - 2r, \qquad c_4 = c_1 - 3r, \qquad c_5 = c_1 - 4r$$

علما أن أساس المتتالية هو r :

بالتعويض في المعادلة (1) نجد:

$$c_1 + c_1 - r + c_1 - 2r + c_1 - 3r + c_1 - 4r = 750000$$

$$\Leftrightarrow 5c_1 - 10r = 750000 \Rightarrow 5 \times 200000 - 10r = 750000$$

$$\Leftrightarrow 10r = 250000 \Rightarrow r = 25000$$

ومنه: $c_5 = 100000$ و $c_4 = 125000$ و $c_3 = 150000$ و $c_2 = 200000 - 25000 = 175000$ و $c_1 = 200000$

2.حساب مدة التوظيف:

$$c_1 = 200000 \text{ و } \qquad i = 5\% \text{ و } \qquad I = 81420 \text{ و } \qquad n = ?$$

$$I = C[(1+i)^n - 1] \Rightarrow 81420 = 200000[(1.05)^n - 1]$$

$$\Leftrightarrow 1.4071 = (1.05)^n \Rightarrow \ln 1.4071 = n \ln(1.05)$$

$$\Leftrightarrow 0.341530 = 0.40879 \times n \Rightarrow n = 7\ ans$$

أي أن مدة التوظيف هي 7 سنوات.

3.حساب القيمتين الإسميتين:

لدينا مبلغ الدين الآن هو: $$500000 - 175000 = 325000$$

وعند التكافؤ يكون: $$a = a_1 + a_2$$

$$\Leftrightarrow 325000 = v_1(1+i)^{-n_1} + v_2(1+i)^{-n_2}$$

$$\Leftrightarrow 325000 = v_1(1.06)^{-4} + v_2(1.06)^{-6}$$

ولدينا:

$$v_1 = v_2 = v$$

$$325000 = v[(1.06)^{-4} + (1.06)^{-6}] \Rightarrow v = 217093.18$$

ومنه:

$$v_1 = v_2 = 217093.18$$

4.حساب القيم الإسمية للأوراق المالية:

لدينا:

$$c_3 = 150000$$

المبلغ المدفوع مباشرة هو:

$$150000 \times \frac{1}{2} = 75000$$

مبلغ الدين المتبقي هو:

$$350000 - 75000 = 275000$$

عند التكافؤ يكون:

$$a = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{275000 = v_1(1.06)^{-2} + v_2(1.06)^{-4} + v_3(1.06)^{-6} + v_4(1.06)^{-8} + v_5(1.06)^{-10} + v_6(1.06)^{-12}}$$

القيم الاسمية تشكل حدود متتالية هندسية أساسها 1.2، ومنه:

$$v_1\,, v_2 = v_1 \times 1.2\,, v_3 = v_1(1.2)^2, v_4 = v_1(1.2)^3, v_5 = v_1(1.2)^4, v_6 = v_1(1.2)^5$$

ومنه:

$$\mathbf{275000 = v_1\big[(1.06)^{-2} + 1.2(1.06)^{-4} + (1.2)^2(1.06)^{-6} + (1.2)^3(1.06)^{-8} + (1.2)^4(1.06)^{-10} + (1.2)^5(1.06)^{-12}\big]}$$

$$275000 = v_1 \times 6.334324 \Rightarrow v_1 = 43414.26$$

ومنه:

$$v_2 = v_1 \times 1.2 = 52097.11$$

$$v_3 = v_1 \times (1.2)^2 = 62516.53$$

$$v_4 = v_1 \times (1.2)^3 = 75019.84$$

$$v_5 = v_1 \times (1.2)^4 = 90023.81$$

$$v_6 = v_1 \times (1.2)^5 = 108028.57$$