الجمهوريّة الجزائريّـة الدّيمقراطيّـة الشّعبيّـة
وزارة التّعليم العالي والبحث العلميّ

Université Ferhat Abbas - Setif
جـامعة فرحـات عبّاس سطيف-1-
كلّيّة العلـوم الاقتصاديّة والتّجاريّة وعلوم التّسيير
قسم التعليم الأساسي

مطبوعة بعنوان:

محاضرات في مقياس الإحصاء2 مدعمة بتمارين محلولة

مطبوعة موجهة لطلبة السنة الأولى LMD "الجذع المشترك"

من إعداد:
د. مقيدش نزيهة

السنة الجامعية: 2021- 2022

بسم الله الرحمن الرحيم

١٤٣٨

فهرس المحتويات

الفصـــل الأول

مدخل إلى حساب الاحتمالات

1- مفاهيم أساسية

2- قاعدة حساب الاحتمالات

3- التحليل التوفيقي

تمهيد

يعد علم الاحتمالات من أهم فروع علم الإحصاء لأن معظم النظريات والطرق الإحصائية بنيت على ذلك، فمن جانب آخر فإن علم الاحتمالات يؤثر في الحياة اليومية للأفراد والمجتمعات، إذ أن كثير من القرارات الفردية والجماعية التي تتخذ يوميا تبنى على توقعات متعددة ومختلفة لحدوث بعض الحالات أو عدم حدوثها.

1- مفاهيم أساسية في نظرية الاحتمالات Basic Notions on Probability Theory

1-1- : نظرية المجموعات والعمليات على المجموعات

نظرية المجموعات هي جزء مهم من مفاهيم الاحتمالات، لأن معظم الحوادث الناتجة عن التجارب العشوائية نعبر عليها كمجموعات من النتائج التي نحصل عليها عند اجراء التجارب، والتي يتم التعبير عن وقوعها بدلالة الاحتمال.

1-1-1 مفاهيم عامة حول المجموعات

- **تعريف المجموعة Set** : هي تجميع من الأشياء المحددة المتمايزة أو المتجانسة والمعرفة بشكل جيد[1]، للمجموعة عناصر رئيسية تتميز بها وهي[2]:
  - اسم المجموعة ويرمز له بالحروف اللاتينية الكبيرة A، B، C ، ويرمز لعناصرها بالحروف اللاتينية الصغيرة a،b،c...؛
  - وجود عناصر المجموعة والفواصل التي تفصلها.
  - توصف المجموعة بذكر العناصر التي تحتويها بطريقتين :

✓ طريقة العد التي تتم بوضع جميع العناصر المنتمية إلى المجموعة بين حاضنتين { } أو قوسين ( ).

مثال (01.1): مجموعة الأعداد الطبيعية الأقل من 8 تعرض كما يلي: $A = \{1,2\ ,3\ ,4,5,6\ ,7\}$

✓ طريقة القانون التي تتم بوضع القانون بين حاضنتين.

مثال(02.1): مجموعة الأعداد الطبيعية من مضاعفات العدد 3 تعرض كما يلي: $B = \{\in N/x = 3k, k\in N\ x\}$

- لا يتم تكرار العناصر داخل المجموعة كما أن ترتيب العناصر لا يهم.

- **أنواع المجموعات**

- **المجموعة الجزئية Subset**: نقول عن المجموعة A أنها مجموعة جزئية من المجموعة B إذا كان كل عنصر من A ينتمي إلى B. في هذه الحالة، نقول أن A محتواة في B أو B تحوي A [3]ونرمز لها بـ:

$$A\subset B\Leftrightarrow \forall\ x\in A \Rightarrow x\in B$$

---

[1] عزام صبري [2010] : الإحصاء الرياضي ، الطبعة الأولى، دار صفاء للنشر والتوزيع ، عمان، ص 15.

[2] Bernard GRAIS [2003] : Méthodes statistiques ,techniques statistiques2, Dunod, Paris, p.12.

[3] البشير عبد الكريم [2006]: إحصاء 2: الاحتمالات والإحصاء – دروس مع تمارين محلولة، دار الكتاب العربي، الجزائر ، ص 17-19.

مثال(03.1): إن مجموعة الأعداد الطبيعية N محتواة في مجموعة الأعداد الصحيحة Z ومجموعة الأعداد الصحيحة محتواة في مجموعة الأعداد الحقيقية R وهذه الأخيرة محتواة في مجموعة الأعداد المركبة أي:

$$\mathbf{N \subset Z \subset R \subset C}$$

- **المجموعات المتساوية Equal Set** : تتساوى مجموعتان A وB إذا كان لهما نفس العناصر وكانت كل من المجموعتين محتواة في الأخرى ويعبر عنها رياضيا بـ:

$$\mathbf{A \subseteq B \ \wedge \ B \subseteq A \Rightarrow A = B}$$

مثال(04.1): لتكن المجموعتان A وB:

حلول المعادلة $A = \{ x^2 = 4\}$

$B = \{ -2, 2\}$

إن المجوعتين A وB متساويتان لأن حل المعادلة المحتواة في المجموعة A هو عناصر المجموعة B.

- **المجموعة الكلية**: إذا كانت المجموعة U تحوي كل المجموعات الجزئية، نسمي المجموعة U بالمجموعة الكلية أو الفضاء.

مثال(05.1): إذا كانت المجموعة U هي مجموعة دول العالم، وA_i هي مجموعة الدولة i، فكل مجموعة A_i في هذه الحالة محتواة في المجموعة U وبالتالي تسمىU بالمجموعة الكلية أو الفضاء.

- **المجموعة الخالية Empty Set** : إذا كان عدد عناصر المجموعة صفراً، أي لا تحتوي على أي عنصر تسمى بالمجموعة الخالية ويرمز لها بالرمز $A = \{\}$ أو **ø**.

مثال (06.1): مجموعة المثلثات التي لها أربعة أضلاع هي مجموعة خالية **Ø** لأنه لا توجد مثلثات لها أربعة أضلاع.

مثال (07.1): مضاعفات العدد **5** بين الصفر والواحد هي مجموعة خالية.

- **المجموعة المنتهية والمجموعة القابلة للعد Uncountable and Countable Sets**: تكون المجموعة منتهية إذا كانت خالية أو تحتوي على عدد محدود من العناصر، أي يمكن عدّ عناصرها، بمعنى تحتوي n عنصر حيث n عدد طبيعي، وإلا فإنها غير منتهية. ونقول عن مجموعة قابلة للتعداد إذا كانت منتهية أو كان بإمكان ترتيب عناصرها بطريقة متتالية.

مثال (08.1): إذا كانت المجموعة **A** تمثل مجموعة أشهر السنة فإن هذه المجموعة منتهية لأنها تحتوي على **12** عنصر $n = 12$

مثال (09.1): إذا كانت المجموعة **A** تمثل العناصر التالية:

$$\mathbf{A = \{x \,/ x \in [-2, 45]}$$

إن هذه المجموعة غير منتهية لأنها تحتوي على عدد غير محدود من العناصر أي يوجد عدد لا نهائي من القيم محصور في المجال **2-** و **45**.

مثال (10.1): إذا كانت المجموعة **A** هي مجموعة من الأعداد الطبيعية فإن هذه المجموعة قابلة للتعداد، لكنها غير منتهية.

➢ **المجموعتان المنفصلتان Disjoint Sets**: تكون المجموعتان **A** و**B** إذا كان لا توجد عناصر مشتركة بينهما أي تقاطعهما يساوي مجموعة خالية $A \cap B = \emptyset$.

مثال(11.1): ولتكن المجموعتان **A** و**B**:

$$A = \{4,9,11\}$$
$$B = \{1,3\}$$

إذا نلاحظ أن: $A \cap B = \emptyset$ ، وبالتالي نقول أن **A** و**B** مجموعتان منفصلتان.

➢ **المجموعة المكملة Complement Sets**: إذا كانت المجموعة A مجموعة جزئية من **B** فإن متممة **A** بالنسبة لـ **B** هي مجموعة العناصر التي تنتمي إلى **B** ولا تنتمي إلى **A**. ويرمز لمتممة **A** بـ $\overline{A}$

$$\mathbf{C_B A = \{x / x \in B \wedge x \notin A\} = \overline{A}}$$

إذا كانت المجموعة $A \subseteq B$ فإن $A - B$ يسمى مكمل المجموعة B بالنسبة للمجموعة A ويرمز له بالرمز (A^C):

$$\mathbf{A^C = \{ x \in B, x \notin A\}}$$

وإذا كانت Ω تمثل مجموعة شاملة فإن:

$$\mathbf{A^C = \{ x \in \Omega, x \notin A\}}$$

لكل مجموعة A مجموعة مكملة $\overline{A}$ تمثل بقية العناصر في مجموعة الأساسΩ والتي لا تنتمي إلى A.

ومن خصائص المجموعة المكملة نذكر منها: [1]

1. $A \subseteq B \Rightarrow \bar{B} \subseteq \bar{A}$
2. $A \cup \bar{A} = \Omega$
3. $A \cap \bar{A} = \emptyset$

1. $A \cap \bar{A} = \emptyset$
2. $\overline{\Omega} = \emptyset$
3. $\overline{\emptyset} = \Omega$
4. $\overline{\overline{A}} = A$

1. $A \cup \bar{A} = \Omega$
2. $\Omega - A = \bar{A}$
3. $A - B = A \cap \bar{B}$

مثال(12.1): المجموعتان A وB جزئيتان من المجموعة الكلية Ω ، حيث:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7, a, b, c\}$$
$$A = \{1,2,3,4,5,6,7,\}$$
$$B = \{a, b, 1,3\}$$

- حدد المجموعة $\overline{B}$ ؟
- بما أن: $\overline{B} = \Omega - B$ يمكننا استعمال نفس خطوات الفرق، فنختار العناصر الموجودة في المجموعة الكلية Ω وغير موجودة في المجموعة B، فهذه العناصر هي $\Omega - B$ أي المجموعة $\overline{B}$ ، إذا:

$$\overline{B} = \Omega - B = \{2,4,5,6,7, c\}$$

[1] جبار عبد المضحي[2011]: مقدمة في نظرية الاحتمالات، دار المسيرة، الأردن، ص 19.

➢ **أصلي مجموعة أو عدد عناصر مجموعة Cardinality of a finite Set**: أصلي مجموعة A هو عدد العناصر التي تحتويها هذه المجموعة ويرمز له بالرمز $|A|$ أو Card(A)، إذا كانت المجموعة A تحتوي على n عنصر فإن عدد عناصرها يكتب كما يلي:

$$\mathbf{Card(A) = |A| = n}$$

مثال(13.1):

$A = \{h, n, m, o\} \to |A| = 4$

1-1-2- العمليات على المجموعات Operations on Sets:

كما توجد عمليات كالجمع والضرب على الأعداد، توجد عمليات على المجموعات تسمى الاتحاد، التقاطع، الفرق والجداء وكما ستتم الإشارة قانون مورجان[1].

– **الاتحاد Union**: إن اتحاد المجموعة A مع المجموعة B هي المجموعة C التي تحتوي على عناصر من المجموعة A أو B أو كليهما. يعبر عليه رياضيا بـ:

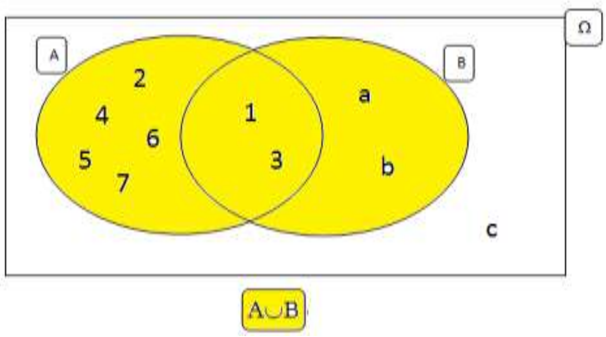
$$\mathbf{C = A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}}$$

مثال(14.1): لتكن المجموعتين Aو B :

$A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$
$B = \{1,3,a,b\}$
$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,a,b\}$

ويمكن توضيح $A \cup B$ كما يلي:

الشكل(1–01)



➢ **خواص الإتحاد**:

1- $-A \cup B = B \cup A$ (الاتحاد تبديلي)

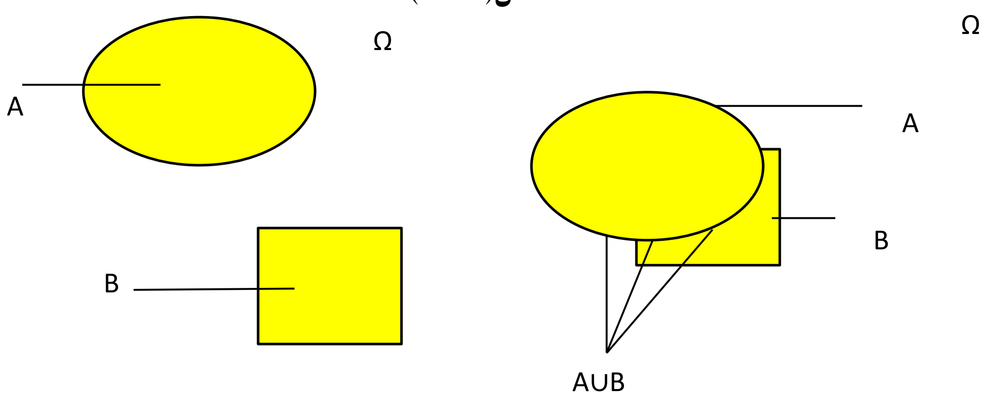
2- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C) = (A \cup B \cup C)$ (**الاتحاد تجميعي**)

3- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (**الاتحاد توزيعي بالنسبة للتقاطع**)

[1] البشير عبد الكريم [2006]:مرجع سابق، ص 22.

4- $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{A} \cup \mathbf{B}; \mathbf{B} \subseteq \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$
5- $A \cup A = A$
6- $A \cup \Omega = \Omega$
7- $A \cup \emptyset = A$
8- $A \cup \overline{A} = \Omega$

الشكل(02.1)



– **التقاطع Intersection** : إن تقاطع المجموعة A مع المجموعة B هي المجموعة C التي تحتوي على العناصر المشتركة بين المجموعة A و B يعبر عنها رياضيا بـ:

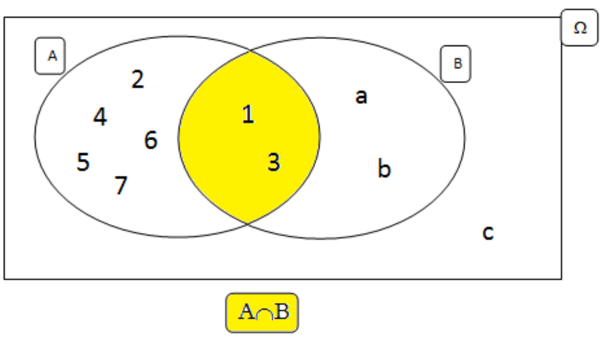
$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{\mathbf{x} / \mathbf{x} \in \mathbf{A} \wedge \mathbf{x} \in \mathbf{B}\}$$

مثال(15.1): لتكن المجموعتين A وB :

$A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$
$B = \{1,3,a,b\}$
$A \cap B = \{1,3\}$

ويمكن توضيح $A \cap B$ كما يلي:

الشكل(1–03)



➢ **خواص التقاطع:**

1- $A \cap B = B \cap A$ (**التقاطع تبديلي**)

2- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = (A \cap B \cap C)$ (**التقاطع تجميعي**)

3- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$(**التقاطع توزيعي بالنسبة للاتحاد**)

4- $A \cap \emptyset = A$
5- $\mathbf{A} \cap \bar{\mathbf{A}} = \emptyset$
6- $A \cap A = A$
7- $A \cap \Omega = A$
8- $A \cap B \subseteq A; \ A \cap B \subseteq B$
9- $A \cup (B C) = (AB) (AC)$

– **الفرق Sets Difference**: إن طرح المجموعة B من المجموعة A هي المجموعة C التي تحتوي على العناصر التي تنتمي للمجموعة A ولا تنتمي للمجموعة B ويعبر عنه رياضيا كما يلي:

$$\mathbf{C = A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}}$$

مثال (**16.1**): لتكن المجموعتين A وB معرفتين كما يلي:

$A = \{a, v, m, 1,2\}$
$B = \{a, v, m, c, b\}$

الفرق بينA وB هو المجموعة:

$A - B = \{1,2\}$

الفرق بينB و Aهو المجموعة:

$B - A = \{c, b\}$

– **الفرق التناظري Symmetric Difference** : يعرف الفرق التناظري للمجموعتين A وB بأنه جميع عناصرB التي لا تنتمي إلى A وجميع عناصر A التي لا تنتمي إلى B ، بمعنى مجموعة عناصر المجموعتين عدا العناصر المشتركة ويرمز له بالرمزAΔB:

$$\mathbf{A\Delta B = \{x/x \in A \wedge x/x \notin B , x \notin A \wedge x \in B\}}$$
$$\mathbf{A\Delta B = \{x/x \in A \wedge x \notin B , x \notin A \wedge x \in B\}}$$

مثال(**17.1**):

$A = \{a, v, m, 1,2\}$
$B = \{a, v, m, c, b\}$
$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$
$A - B = \{1,2\}$
$B - A = \{c, b\}$
$A \Delta B(A - B) \cup (B - A) = \{1,2, c, b\}$

➢ **خواص الفرق التناظري** :

1- $A \Delta A = \emptyset$
2- $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$
1- $A \Delta B = B \Delta A$
3- $A \Delta \emptyset = A$

- **الجداء الديكارتي للمجموعات Cartesian Products of Sets**: إذا كانت المجموعة A تحتوي على العناصر x و المجموعة B تحتوي على العناصر y فإن مجموعة الجداء (A×B) هي المجموعة التي تحتوي على الأزواج المرتبة (x,y) بحيث x ينتمي العنصر إلى A و العنصر y إلى B:

$$\mathbf{A\times B = \{(x, y) / \ x\in A, y\in B \ \}}$$

مثال(18.1): لتكن المجموعتين A و B معرفتين كما يلي:

$A = \{x, y, z\}$
$B = \{1,2\}$

الجداء الديكارتي (A×B) يكون كما يلي:

$$(A \times B) = \{(x, 1), (x, 2), (y, 1), (y, 2), (z, 1), (z, 2)\}$$

الجداء الديكارتي (B×A) يكون كما يلي:

$$(B \times A) = \{(1, x), (1, y), (1, z), (2, x), (2, y), (2, z)\}$$

- **قانون مورجان** (**Loi Morgan**)[1]:

يرتبط قانون مورجان بعمليات التقاطع والاتحاد والتكامل بين المجموعات، ويتلخص في القواعد التالية:

$$\mathbf{\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}}$$
$$\mathbf{\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}}$$

ملاحظة: يمكن تعميم قانون مورجان على عدة مجموعات وتكون النتيجة على الشكل التالي[2]:

1-

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$$

وبصفة عامة

$$\overline{\bigcap_{\iota=1}^{\infty} A_\iota} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i$$

حيث أن

$$\bigcup_{i=1}^{n} \bar{A}_i = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \ldots \cup \bar{A}_n$$

وأن

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_i \cap A_i \cap \ldots \cap A_i$$

2-

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$$

وبصفة عامة

$$\overline{\bigcap_{\iota=1}^{\infty} A_\iota} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i$$

[1]F.M. Dekking & al C. Kraaikamp H.P. Lopuhaa¨ L.E. Meester [2005] : A modern Introduction to Probability and Statistics, understanding why and how, Springer-Verlag London, p.15.

[2] أحمد عامر عامر[2004]: الاحصاء II: محاضرات وتمارين في حساب الاحتمالات ومبادئ الاحصاء الرياضي ، الجزء الأول، دار الغرب للنشر والتوزيع، الجزائر، ص28.

حيث أن

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_n$$

وأن

$$\bigcup_{i=1}^{n} \bar{A}_i = A_i \cup A_i \cup \dots \cup A_i$$

مثال(19.1): نقوم برمي زهرة النرد في الهواء وليكن الحادث A هو الحصول على عدد أقل من 3 و B هو الحصول على عدد زوجي، بين أن:

$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

الحل: إن مجموعة الأساس عبارة عن كل النتائج الممكنة ويساوي:

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

9- **إثبات أن:** $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

$A \cup B = \{1,2\} \cup \{2,4,6\} = \{1,2,4,6\} \Rightarrow \overline{A \cup B} = \{3,5\}$

$\bar{A} \cap \bar{B} = \{3,4,5,6\} \cap \{1,3,5\}$

ومنه فإن: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

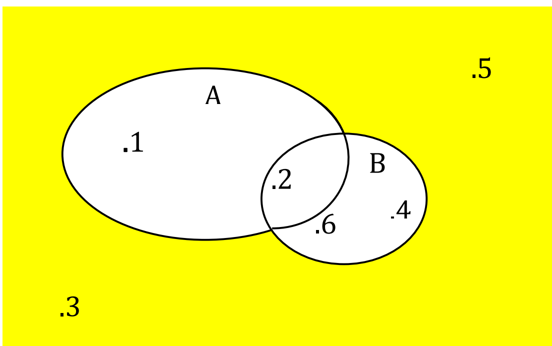
10- **إثبات أن:** $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

$$A \cap B = \{2\} \Rightarrow \overline{A \cap B} = \{1,3,4,5,6\}$$
$$\bar{A} = \{3,4,5,6\} \quad \bar{B} = \{1,3,5\}$$
$$\Rightarrow (\bar{A} \cup \bar{B}) = \{1,3,4,5,6\}$$

ومنه فإن: $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

11- لتوضيح المساواة بشكل أدق، نستخدم مخطط Van لإثبات أن: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

الشكل (04.1)



تمثل المساحة الملونة في المخطط أعلاه المجموعة: $(\overline{A \cup B})$ أي العناصر التي لا تنتمي إلى $(\overline{A \cup B})$ وهي 3 و5، وبالمثل فإن المجموعة: $(\bar{A} \cap \bar{B})$ هي العناصر المشتركة بين متممة A ومتممة B وهي 3و5 ومنه:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

1-2- العناصر الأساسية لمسألة الاحتمالات

1-2-1- التجربة Experiment

التجربة هي كل عملية تؤدي إلى ملاحظة أو قياس وليس من الضروري أن تكون الملاحظة عددية. وترتبط نتائج التجربة بجملة من الشروط النظامية أو غير النظامية التي تُجرى ضمنها، ونميز بين نوعين من التجارب[1]:

- **التجربة النظامية Regular Experiment**:هي كل تجربة يمكن التنبؤ بنتائجها مسبقا على أساس القوانين العلمية، إنطلاقا من جملة من الشروط المرتبطة بالتجربة، كالتجارب الخاصة بالعلوم الطبيعية أو الفيزيائية.
- **التجربة الاحتمالية أو العشوائية Random Experiment**: هي كل تجربة لا يمكن التنبؤ بنتائجها مسبقا، وحتى وإن تم تكرارها في نفس الشروط فليس بالضرورة أن تعطي نفس النتائج، تعتمد على العشوائية، والمقصود بالعشوائية إعطاء نفس الفرصة أو الحظوظ لجميع العناصر للظهور في التجربة.

مثال(1.20): رمي قطعة نقدية مرة واحدة، هذه التجربة هي تجربة عشوائية لأننا لا يمكننا التنبؤ بالنتائج مسبقا وأيضا أعطينا حظ 50% للصورة وحظ 50% للكتابة للظهور في التجربة.

مثال(1.21): رمي زهرة النرد، هذه التجربة هي تجربة عشوائية لأننا لا يمكننا التنبؤ بالنتائج مسبقا وأيضا أعطينا حظ$\frac{1}{6}$ لكل وجه من الأوجه الستة في الظهور.

1-2-2- مجموعة الأساس (فضاء العينة/ فراغ الحوادث الأولية)Sample Space :

هي مجموعة المكونة من جميع النتائج الممكنة أو المتوقعة للتجربة العشوائية، تسمى كل نتيجة من نتائج التجربة العشوائية عنصرا ويرمز لها بالرمز E، أو Ω، أو S. تحدد بمجموعة رياضية {}ويرمز لعدد عناصرها بالرمز | |أو Card(E).[2]

مثال(1.22): تجربة رمي زهرة النرد مرة واحدة، مجموعة الأساس هي:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \quad |\Omega| = 6$$

مثال (1.23): رمي قطعة نقود مرة واحدة، مجموعة الأساس هي:

$$\Omega = \{P, F\} \quad |\Omega| = 2$$

مثال(1.24): رمي قطعة نقود مرتين، مجموعة الأساس هي:

$$\Omega = \{(P,F),(F,P),(P,F),(F,P)\} \quad |\Omega| = 4$$

ملاحظة: نلاحظ أن مجموعة الأساس تتحدد بأداة التجربة (زهرة نرد، قطعة نقد، صندوق كرات...)، وطريقة التجربة(رمي مرة، رمي مرتين، سحب على التوالي، سحب دفعة واحدة، سحب مع الإرجاع، سحب دون إرجاع...).

1-2-3- الحدث العشوائيRandom Event :

[1] عبد الحفيظ مصطفى[2008]: نظرية الاحتمالات، مبادئ وتطبيقات، الجزء الأول، الطبعة الرابعة، ديوان المطبوعات الجزائرية، الجزائر، ص 3 – 4.

[2] أحمد عامر عامر [2004]: مرجع سابق، ص 20.

هو نتيجة يمكن أن تتحقق أو لا عند اجراء التجربة، وهو عبارة عن كل المجموعات الجزئية التي يمكن تكوينها بعناصر مجموعة الأساس، ويهتم به صاحب التجربة و يُفهم من صيغة السؤال، ويرمز له بالحروف اللاتينية الكبيرةA , B ,C ، ما عدا E ويرمز لعناصره بالحروف اللاتينية الصغيرة a،b،c...، يحدد بمجموعة رياضية ويرمز لعدد عناصره بالرمز | |أو Card(A) .

مثال(25.1): تجربة رمي زهرة النرد مرة واحدة، ليكن الحدث A الحصول على الرقم 5، إذا الحدث A هو:

$A = \{5\} \quad |A| = 1$

مثال (26.1): تجربة رمي زهرة النرد مرة واحدة، ليكن الحدث B الحصول على العدد زوجي، إذا الحدث B هو:

$B = \{2,4,6\} \quad |B| = 3$

مثال (27.1): تجربة رمي زهرة النرد مرة واحدة، ليكن الحدث C الحصول على العدد 7، إذا الحدث C هو:

$C = \{\,\} = \emptyset \quad |C| = 0$

مثال (28.1): تجربة رمي قطعة النقود مرة واحدة، ليكن الحدثD الحصول على صورة أو كتابة، إذا الحدث Dهو:

$D = \{P, F\} \quad |D| = 2$

يمكن تمييز أنواع الحوادث التالية[1]:

- **الحدث العشوائي من ناحية التركيبة:** نميز بين نوعين من الحوادث:

➢ **الحدث البسيط Simple Event**: هو حدث يحتوي على عنصر واحد من عناصر مجموعة الأساس وبالتالي لا يمكن تجزئته إلى أكثر من حدث، ويسمى أيضا بالحدث الأولي.

مثال(29.1): تجربة رمي زهرة النرد مرة واحدة، ليكن الحدث A الحصول على الرقم 5، إذا الحدث A هو **حدث بسيط**.

$A = \{5\} \quad |A| = 1$

➢ **الحدث المركب Complex Event**: هو حدث يمكن تقسيمه إلى حدثين على الأقل، أي يمكن تقسيمه إلى عدة حوادث بسيطة.

مثال (30.1): تجربة رمي زهرة النرد مرة واحدة، ليكن الحدث B الحصول على العدد زوجي، إذا الحدث B هو **حدث مركب**، يمكن تجزئته إلى ثلاثة حوادث بسيطة وهي، الحدث {2}، الحدث{4} ، الحدث {6}.

$B = \{2,4,6\} \quad |B| = 3$

- **من ناحية امكانية الوقوع:** نميز بين ثلاثة أنواع:

➢ **الحدث الأكيد Certain Event**: هو حدث يكون تحققه مؤكدا عند كل تجربة، ويتكون من جميع الحوادث البسيطة المرتبطة بمجموعة الأساس.

[1] لحسن عبد الله باشيوة [2014]: مقدمة في الاحتمالات، الطبعة الأولى، الوراق للنشر والتوزيع، عمان ، الأردن، ص 44.

مثال(31.1): تجربة رمي قطعة النقود مرة واحدة، ليكن الحدثA الحصول على صورة أو كتابة، إذا الحدث Aهو **حدث أكيد** ويمثل مجموعة الأساس.

$$A = \{ P, F\} = \Omega , |A| = |\Omega| = 2$$

- **الحدث المستحيل Impossible Event** : هو حدث لا يمكن أن يتحقق مهما كان عدد التجارب، ويمثل المجموعة الخالية.

مثال(32.1): تجربة رمي زهرة النرد مرة واحدة، ليكن الحدث B الحصول على العدد 7، إذا الحدث B هو **حدث مستحيل**.

$$B = \{\} \quad |B| = 0$$

- **الحدث الممكن Possible Event**: هو حدث يمكن أن يقع أو لا عند اجراء التجربة وهو غير أكيد وغير مستحيل.

مثال (33.1): تجربة رمي زهرة النرد مرة واحدة، ليكن الحدث C الحصول على العدد فردي، إذا الحدث C هو **حدث ممكن**.

$$C = \{ 1, 3, 5\} \quad |C| = 3$$

1-2-4- الاحتمال Probability

هو نسبة الحظوظ لكي يتحقق حدث عشوائي، وهو حاصل قسمة عدد عناصر الحدث العشوائي(عدد الحالات الملائمة أو عدد النجاحات) على عدد عناصر مجموعة الأساس (عدد الحالات الممكنة) ويعطى بالصيغة التالية[1]:

$$\mathbf{P(A)} = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \frac{\text{عدد عناصر الحدث العشوائي}}{\text{عدد عناصر مجموعة الأساس}} = \frac{|\mathbf{A}|}{|\mathbf{E}|}$$

إذا تتراوح قيمة الاحتمال ما بين 0و1:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

إذا كان:

حدث مستحيل	$P(A) = 0$
حدث أكيد	$P(A) = 1$
حدث ممكن	$0 < P(A) < 1$

1-3- الاحتمال النظري والاحتمال التجريبي والعلاقة بينهما

1-3-1- الاحتمال النظري

[1] Bernard GRAIS [2003] : Op. Cit, p.12.

يعتمد الاحتمال النظري أو ما يسمى أيضا بالاحتمال الكلاسيكي في حسابه على أسس وقواعد الرياضيات والتي تستخدم في تحديد عدد النتائج الممكنة للتجربة وعدد النواتج الملائمة لوقوع الحادث، ويحسب بالعلاقة التالية:

$$\mathbf{P(A)} = \frac{||}{|\mathbf{E}|}$$

وهو احتمال قائم على فرضية نظرية مفادها تكرار التجربة مالا نهاية مرة، وهو أمر مستحيل في الواقع لهذا يبقى مجرد احتمال نظري ثابت إلى مالا نهاية.

مثال(34.1): تجربة رمي قطعة نقود نركز على حدث الحصول على صورة، إن احتمال الحصول على صورة هو $\frac{1}{2}$ إلى ما لا نهاية.

إن المدخل التقليدي لحساب الاحتمالات يتحدد كالآتي: إذا كانت التجربة عشوائية لها N نتيجة وكانت هذه النواتج متساوية الفرص في الظهور، فإن احتمال أي ناتج من هذه النواتج هو: $\frac{1}{N}$ ، بناء على ذلك إذا كان الحدث A معرف على مجموعة الأساس (فراغ الحوادث الأولية) وكان يحتوي على n عنصر، أي أن عدد الحالات التي يقع فيها A هي n، بينما عدد النواتج ممكنة التحقق هيN، بفرض أن لكل حالة نفس الفرص للوقوع فإن احتمال تحقق الحدث A الذي يرمز له بـ P(A) هو عبارة عن ناتج عدد الحالات الملائمة على عدد الحالات الممكنة[1].

$$\mathbf{P(A)} = \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{N}}$$

حيث أن عدد الحالات الملائمة هي تلك الحوادث التي نرجو حدوثها عند اجراء تجربة، والحالات الممكنة هي الحوادث التي تقع بغض النظر عن كونها تهمنا أو لا تهمنا وتمثل عدد عناصر مجموعة الأساس.

مثال(35.1): تجربة رمي قطعة نقود نركز على حدث الحصول على صورة، إن احتمال الحصول على صورة هو ½ إلى ما لا نهاية.

هذا الاحتمال يسمى بالاحتمال النظري لأنه يبقى ثابت، وهي نتيجة مبنية على فرضية مفادها أن نرمي قطعة النقود مالا نهاية من المرات، وهذه الفرضية مجردة مستحيل تحقيقها. وبهذا لا نحتاج للإنجاز الفعلي للتجربة، ومن أجل الاعتماد المدخل التقليدي لحساب الاحتمالات يجب توفر شرطان:

- عدد الحالات الممكنة غير منته، أي أننا نطبقه فقط عندما يكون عدد الحالات الممكنة منتهية.
- الحوادث متكافئة الاحتمال(الاحتمال متساوي) من حيث الحدوث، أي لها نفس الفرص.

يقتصر هذا النوع من الاحتمالات على قسم معين من التجارب العشوائية فقط أي على ذلك القسم الذي تكون فيه حظوظ ظهور عناصر التجربة متساوية وبالتالي فإن مجال استعمالاته العملية يكون محدودا[2].

1-3-2- الاحتمال التجريبي (المدخل الاحصائي لحساب الاحتمالات) Experimental Probability

[1] الحسن عبد الله باشيوة [2014]: مرجع سابق، ص 49.

[2] أحمد عامر عامر[2004]: مرجع سابق، ص 34.

الاحتمال التجريبي هو احتمال قائم على تجربة فعلية وهو ما يقتضي إحضار الأداة وتحديد عدد التجارب n (150،50،10،...)، ثم إجراء التجربة عمليا وتسجيل النتائج (x) المتمثلة في عدد المرات التي تحصلنا فيها على الحدث العشوائي الذي يهمنا، حيث (x) يتغير من تجربة لأخرى، بعدها يتم حساب الاحتمال التجريبي f_n والذي يمثل التكرار النسبي للحادث A حيث :

$$\mathbf{f_n = \frac{x}{n}}$$

يفسر العالم السويسري R. Von. MISES الاحتمال التجريبي كأنه تكرار احتمالي، وينطلق في تعريفه الاحصائي بافتراضه اجراء سلسلة محاولات مستقلة عن بعضها البعض تمثل في مجموعها التجربة العشوائية، وعلى ضوئها يعرف الاحتمال P(A) بأنه القيمة النهائية للتكرار النسبي لظهور الحادث A.

بحيث يمثل f_n (A) التكرار النسبي للحادث A، لعدد المحاولات n في التجربة، كما يمثل x التكرار المطلق للحادث A بعد إجراء تجربة من n محاولة، وعليه يمكن تصور الاحتمال التجريبي أو الاحصائي P(A) هو عبارة عن التكرار النسبي f_n للحادث A..

وتكون قيمة هذا التقريب جيدة كلما كان عدد التجارب أو التكرارات كبيرا[1].

مثال(36.1): ما هو احتمال ظهور الصورة في تجربة رمي قطعة نقدية متوازنة، بعد إجراء سلسلة كبيرة من المحاولات.

إن الاحتمال النظري P(A) لهذه التجربة هو $\frac{1}{2}$.

إذا رمزنا لعدد مرات ظهور الصورة بـx ولعدد للتجارب بـ n فإن قيم الاحتمال التجريبي f_n مبينة في الجدول التالي:

n	2000	4000	6000	8000	10000
x	996	2028	3000	4000	4980
$\mathbf{f_n = \frac{x}{n}}$	0.498	0.507	0.500	0.500	0.498

1-3-3- العلاقة بين الاحتمال النظري والاحتمال التجريبي

إن الاحتمال النظري ثابت قائم على فرضية نظرية أما الاحتمال التجريبي متغير قائم على تجربة فعلية، ولوحظ أنه كلما كان عدد التجارب n كبيرا اقترب التكرار النسبي أو الاحتمال التجريبي f_n من الاحتمال النظري(P(A.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{fn = \frac{x}{n} \rightarrow P(A)}$$

وبالتالي نستخلص أن الاقتراب من الاحتمال بصورة أكثر دقة يتطلب توفر مجموعة من الشروط منها:

- اجراء التجارب في نفس الشروط.
- اجراء سلسلة من التجارب (n كبير).

تفيدنا العلاقة بين الاحتمال النظري والاحتمال التجريبي أنه أصبح بالإمكان اجراء دراسات احصائية (جمع بيانات)، بأسلوب العينة أي جزء من المجتمع بدلا من الدراسات الشاملة (قد تكون مستحيلة ومكلفة)، حيث كلما كان

[1] المرجع نفسه، ص 36.

حجم العينة كبير كلما كانت بيانات العينة أقرب لبيانات المجتمع (دقة النتائج)، وهذه النتيجة المهمة بنيت عليها نظرية كاملة في الاحصاء الاستدلالي وهي نظرية المعاينة.

وقد قدم كل من **بيفون وبيرسون** النتائج التي تحصل عليها كل منهما بعد اجراء تجربتهما العشوائية عدة مرات، مقدمان نظرة على ثبات تكرار النسبي وفيما يلي جدول لدراستهما[1].

الجدول (01.1): نتائج بيفون وبيرسون للبرهان على ثبات التكرار النسبي

	عدد المحاولات	عدد مرات ظهور الصورة	التكرار النسبي
بيفون	4040	2048	0.5069
بيرسون	12000	6019	0.5016
بيرسون	24000	12012	0.5005

المصدر: أحمد عامر عامر[2004]: الاحصاء II: محاضرات وتمارين في حساب الاحتمالات ومبادئ الاحصاء الرياضي، الجزء الأول، دار الغرب للنشر والتوزيع، الجزائر، ص36.

مثال (37.1): بهدف احصاء نسبة الملفات المقبولة في طلبات التأشيرة الكندية تم الاطلاع على عينات من ملفات المودعة لدى القنصلية، بافتراض أن نسبة قبول التأشيرات قدرت بـ 50% خلال السنوات الأخيرة، أحسب الاحتمال التجريبي f_n وماذا تلاحظ؟

عدد الملفات ($\mathbf{n}$)	عدد الملفات المقبولة (عدد التأشيرات) ($\mathbf{x}$)	الاحتمال التجريبي($\mathbf{f_n}$)
20	8	$\frac{8}{20} = 0{,}4$
50	23	0,46
100	50	0,50
150	78	0,52
200	102	0,505
300	152	0,507
350	178	0,508
400	205	0,513
500	254	0,508
600	298	0,497
670	336	0,501
900	403	0,0447
1200	510	0,425
1400	701	0,50
1600	900	0,562
2000	1002	0,501

- حساب الاحتمال التجريبي

[1] المرجع نفسه.

: –

$f_n = \frac{x}{n}$, x: عدد التأشيرات المقبولة n: عدد الملفات

$f_1 = \frac{8}{20} = 0{,}4$

الملاحظة: نلاحظ أنه كلما كان عدد التجارب n كبيرا اقترب التكرار النسبي أو الاحتمال التجريبي f_n من الاحتمال النظري$P(A)$ (نسبة الملفات المقبولة خلال السنوات الأخيرة هو 0,5 ويمثل الاحتمال النظري)،كما يتبين لنا أنه كلما زادت (n) فإن (f_n) يختلف اختلافا بسيطا حتى يستقر إلى عدد محدود (قيمة الاحتمال النظري وهي قريبة من0,50).

-2 قواعد حساب الاحتمالات

-1-2 قاعدة جمع الحوادث المتنافية وغير المتنافية

-1-1-2 قاعدة جمع الحوادث المتنافية

نقول عن الحدثان A وB أنهما حدثان متنافيان بالتبادل إذا كان وقوع الحدث A يمنع وقوع الحدث B، ووقوع الحدثB يمنع وقوع الحدث A، أي أنه لا يمكن وقوعهما في آن واحد، وبلغة المجموعات يمكن القول أن الحوادث المتنافية هي مجموعات جزئية منفصلة أو غير متقاطعة[1]، كما يوضحه الشكل:

الشكل(1.05): جمع حدثان متنافيان

$A \cap B = \emptyset$

في هذه الحالة احتمال تحقق A أو B يساوي مجموع احتمال A واحتمال B:

$$\mathbf{P(A\,\text{أو}\,B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

ملاحظة 1: حالة خاصة للتنافي (المتمم أو المكمل):

إذا كان A و$\bar{A}$ حدثان متنافيان أي$A \cap \bar{A} = \emptyset$ ومتكاملان بالنسبة لـΩ أي$A \cup \bar{A} = \Omega$، ففي هذه الحالة احتمال A أو $\bar{A}$ يكون مساويا للواحد.

$$A \cup \bar{A} = \Omega \Leftrightarrow P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) \Leftrightarrow P(A) \cup P(\bar{A}) = P(\Omega) = P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

ملاحظة 2: هذه القاعدة تسمح بحساب $P(A)$ أو $P(\bar{A})$ بدلالة الآخر لأن:

$P(A) = 1 - P(\bar{A})$ أو $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

[1] عزام صبري[2010]: مرجع سابق، ص 55.

ويمكن تعميم هذه الخاصية على n حدث:

ليكن A_1،A_2، ... ...، A_n أحداثا عشوائية متنافية مثنى مثنى ومتكاملة جميعها بالنسبة لـΩ ، في هذه الحالة:

$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = 1$

مثال(38.1): في تجربة رمي زهرة نرد مرة واحدة نعرف الحدثان A و Bكما يلي:

A: الحصول على عدد 6.

B: الحصول على عدد أولي.

- أحسب $P(A \cup B)$

الحل:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \rightarrow |\Omega| = 6$$

A: الحصول على عدد 6:

$$A = \{6\} \rightarrow |A| = 1$$

B: الحصول على عدد أولي:

$$B = \{2,3,5\} \rightarrow |B| = 3 \rightarrow P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{6}$$

نلاحظ أن:

$$A \cap B = \emptyset \rightarrow |A \cap B| = 0 \rightarrow P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{0}{6} = 0$$

- حساب $P(A \cup B)$:

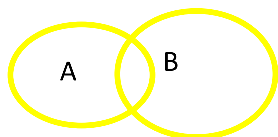
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = P(B) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6}$$

2-1-2- قاعدة جمع الحوادث غير المتنافية:

نقول عن الحدثان AوB أنهما غير متنافيان بالتبادل إذاكان تحقق A لا يمنع تحقق B و تحقق B لا يمنع تحقق A.

أي أنه يمكن وقوعهما في آن واحد، وبلغة المجموعات يمكن القول أن الحوادث غير المتنافية هي مجموعات جزئية غير منفصلة أو متقاطعة[1]، كما يوضحه الشكل:

الشكل (06.1):جمع حدثان غير متنافيان



[1] لحسن عبد الله باشيوة [2014]: مرجع سابق، ص 65.

$$\mathbf{A \cap B \neq \emptyset}$$

في هذه الحالة احتمال تحقق A أو B يساوي مجموع احتمال A واحتمال B ، مطروحا من احتمال تحقق AوB معا.

$$\mathbf{P\left(A\text{و}B\right) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

إذا كان لدينا ثلاث حوادث فإن A أو B أوC فإن تحقق A أو B أوC يعطى بالعلاقة التالية:

$$\boldsymbol{P}\left(\mathbf{A}\text{و}\mathbf{B}\text{أو}\mathbf{C}\right) = \mathbf{P(A \cup B\ C)P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)}$$

مثال (39.1): نرمي زهرة نرد مرة واحدة مرة واحدة ونعرف الاحتمالات التالية:

A: الحصول على عدد أقل أو يساوي 5.

B: الحصول على عدد فردي.

C: الحصول على عدد أولي.

- أحسب: $P(A)$، $P(B)$ ، $P(C)$ ، $P(A \cup B)$ ، $P(A \cup C)$.

الحل:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \ \rightarrow\ |\Omega| = 6$$
$$A = \{1,2,3,4,5\} \ \rightarrow\ |A| = 5$$
$$B = \{1,3,5\} \ \rightarrow\ |B| = 3$$
$$C = \{2,3,5\} \ \rightarrow\ |C| = 3$$
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{6}$$
$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{6}$$
$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{3}{6}$$

- نحتاج أيضا لحساب:

$$A \cap B = \{1,3,5\} \rightarrow\ |A \cap B| = 3 \rightarrow P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{3}{6}$$

$$A \cap C = \{2,3,5\} \rightarrow\ |A \cap C| = 3 \rightarrow P(A \cap C) = \frac{|A \cap C|}{|\Omega|} = \frac{3}{6}$$

$$B \cap C = \{3,5\} \rightarrow\ |B \cap C| = 2 \rightarrow P(B \cap C) = \frac{|B \cap C|}{|\Omega|} = \frac{2}{6}$$

$$A \cap B \cap C = \{3,5\} \rightarrow\ |A \cap B \cap C| = 2 \rightarrow P(A \cap B \cap C) = \frac{|A \cap B \cap C|}{|\Omega|} = \frac{2}{6}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{6} + \frac{3}{6} - \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$$

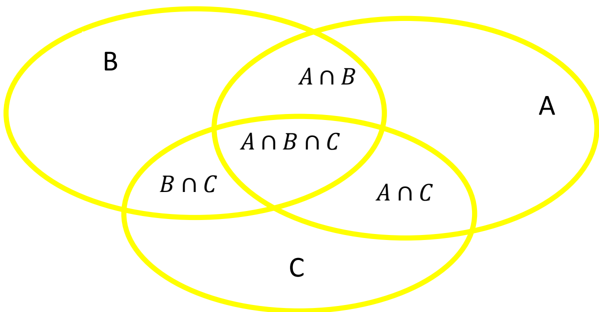
$$P(A\cup C)=P(A)+P(C)-P(A\cap C)=\frac{5}{6}+\frac{3}{6}-\frac{3}{6}=\frac{5}{6}$$

$$P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(B\cap C)=\frac{3}{6}+\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{4}{6}$$

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$
$$=\frac{5}{6}+\frac{3}{6}+\frac{3}{6}-\frac{3}{6}-\frac{3}{6}-\frac{2}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$$

كما يوضحه الشكل التالي:

الشكل (09.1)



2-2- قاعدة ضرب الحوادث المستقلة وغير المستقلة

2-2-1- قاعدة ضرب الحوادث المستقلة

نقول عن الحدثان A وB أنهما مستقلان، إذا كان تحقق الحدث A غير مرتبط(غير مشروط) بتحقق الحدث B وتحقق الحدث B غير مرتبط بتحقق الحدث A ، أي أن وقوع A لا يؤثر في وقوع B ووقوع B لا يؤثر في وقوع A.[1] إن احتمال وقوع A وB يعطى بالعلاقة التالية[2]:

$$\mathbf{P\left(A \text{ و } B\right)=P(A\cap B)=P(A)\times P(B)}$$

ملاحظة: في حالة ما إذا كان لدينا ثلاثة أحداث مستقلة A،B،C،فإن:

$$\mathbf{P(A\cap B\cap C)=P(A)\times P(B)\times P(C)}$$

مثال(40.1): صندوق يحتوي على 7 كريات، منها 4 بيضاء و3 حمراء، نسحب كرتين الواحدة تلوى الأخرى، إذا تم السحب مع الإرجاع (أي إرجاع الكرة الأولى إلى الصندوق قبل سحب الثانية):

- ما هو احتمال أن تكون الكرة الأولى بيضاء والكرة الثانية حمراء؟
- ما هو احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والكرة الثانية بيضاء؟
- ما هو احتمال أن تكون واحدة بيضاء والأخرى حمراء؟
- ما احتمال أن تكون الكرتان من نفس اللون ؟

---

[1]F.M. Dekking C. Kraaikamp H.P. Lopuhaa¨ L.E. Meester [2005] Op.Cit., p.27-33.

[2]حسن عبد الله باشيوة [2014]: مرجع سابق، ص 75.

الحل:

السحب مع الإرجاع: يجعل نتيجة السحب مستقلة غير مشروطة بالسحب الأول.

B: الكرة البيضاء.

R : الكرة حمراء.

- احتمال أن تكون الكرة الأولى بيضاء والكرة الثانية حمراء:

$$P(B_1 \cap R_2) = P(B_1) \times P(R_2) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{12}{49}$$

الشرح: توجد 12 ثنائية من بين 49 ثنائية تكون فيها الكرة الأولى بيضاء والثانية حمراء.

- احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والكرة الثانية بيضاء:

$$P(R_1 \cap B_2) = P(R_1) \times P(B_2) = \frac{3}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{12}{49}$$

الشرح: توجد 12 ثنائية من بين 49 ثنائية تكون فيها الكرة الأولى حمراء والثانية بيضاء.

- احتمال أن تكون واحدة بيضاء والأخرى حمراء:

$$P(B \cap R) = P(B_1 \cap R_2) \text{أو} P(R_1 \cap B_2) = \left(\frac{4}{7} \times \frac{3}{7}\right) + \left(\frac{3}{7} \times \frac{4}{7}\right) = \frac{24}{49}$$

الشرح: توجد 24 ثنائية من بين 49 ثنائية تكون فيها الكرة الأولى حمراء والثانية بيضاء.

- احتمال أن تكون كرتين من نفس اللون:

$$P(B_1 \cap B_2) \text{أو} P(R_1 \cap R_2) = P(B_1 \cap B_2) \cup P(R_1 \cap R_2) = \left(\frac{4}{7} \times \frac{4}{7}\right) + \left(\frac{3}{7} \times \frac{3}{7}\right) = \frac{25}{49}$$

الشرح: توجد 25 ثنائية من بين 49 ثنائية تكون فيها الكرتين من نفس اللون.

2-2-2- قاعدة ضرب الحوادث غير المستقلة (الحوادث الشرطية)

نقول عن الحدثان AوB أنهما غير مستقلان، إذا كان تحقق الحدث A مرتبط بطريقة أو بأخرى بتحقق الحدث B، أي أن وقوع A يؤثر في وقوع B، ويكون الحدث B مشروط بوقوع الحدث A. إن تحقق الحدثان A و B في نفس الوقت يعطى بالعلاقة التالية[1]:

$$\mathbf{P\left(A \text{و} B\right) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)}$$

احتمال وقوع الحدثين A وB في نفس الوقت يساوي احتمال وقوع الحدث A مضروبا في وقوع الحدث B ، إذا علم أن A قد تحقق فعلا قبله.

العبارة P(B/A) تسمى الاحتمال الشرطي لـ B وتقرأ : احتمال تحقق الحدث B شرط A بمعنى احتمال تحقق الحدث B علما أو شرطا أن A تحقق قبله أو معه في نفس الوقت.

ملاحظة: في حالة ما إذا كان لدينا ثلاثة أحداث مستقلة A،B،C،فإن:

$$\mathbf{P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B/A) \times P(C/A \cap B)}$$

[1] D J Wilkinson (SA): Introduction to Probability and Statistics Semester 1,p. 32, available on: https://www.staff.ncl.ac.uk/d.j.wilkinson/teaching/mas131/notes.pdf , (seen on: 02/15/2021)

مثال(41.1): بالعودة للمثال السابق رقم (40.1)، أحسب نفس الاحتمالات إذا كان سحب الكرتين يتم دون إرجاع الكرة الأولى.

الحل:

- **السحب دون إرجاع:** يجعل نتيجة السحب غير مستقلة، مشروطة بالسحب الأول، وعليه فإن: الكرة البيضاء B، الكرة الحمراء R.
- احتمال أن تكون الكرة الأولى بيضاء والكرة الثانية حمراء:

$$P(B_1 \cap R_2) = P(B_1) \times P(R_2/B_1) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{12}{42}$$

الشرح: هناك 12 ثنائية من بين 42 ثنائية تكون فيها الكرة الأولى بيضاء والثانية حمراء.

- احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والكرة الثانية بيضاء:

$$P(R_1 \cap B_2) = P(R_1) \times P(B_2/\ R_1) = \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{12}{42}$$

الشرح: هناك 12 ثنائية من بين 42 ثنائية تكون فيها الكرة الأولى حمراء والثانية بيضاء.

- احتمال أن تكون واحدة بيضاء والأخرى حمراء:

$$P(B \cap R) = P(B_1 \cap R_2) \text{أو} P(R_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P(R_2/\ B_1) + P(R_1) \times P(B_2/\ R_1) = \left(\frac{4}{7} \times \frac{3}{6}\right) + \left(\frac{3}{7} \times \frac{4}{6}\right) = \frac{24}{42}$$

الشرح: توجد 24 ثنائية من بين 42 ثنائية يتم الحصول فيها على كرة حمراء والأخرى بيضاء.

- احتمال أن تكون كرتين من نفس اللون:

$$P(B_1 \cap B_2) \text{أو} P(R_1 \cap R_2) = P(B_1 \cap B_2) \cup P(R_1 \cap R_2) = P(B_1) \times P(B_2/\ B_1) + P(R_1) \times P(R_2/\ R_1) = \left(\frac{4}{7} \times \frac{3}{6}\right) + \left(\frac{3}{7} \times \frac{2}{6}\right) = \frac{18}{42}$$

الشرح: توجد 18 ثنائية من بين 42 ثنائية تكون فيها الكرتين من نفس اللون.

2-2-3- الاحتمال الشرطي Conditional Probability :

إذا كان الحدثان AوB حدثان غير مستقلان، وكان وقوع الحادث B مرتبطا بوقوع الحادث A بمعنى أن الحدث B مشروط بوقوع الحدث A ، وكما تمت الإشارة في قاعدة ضرب الحوادث غير المستقلة، فإن احتمال وقوع AوB معا يعطى بالعلاقة التالية[1] :

$$\mathbf{P\left(A \text{و} B\right) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)}$$

وعليه فإن الاحتمال الشرطي لـ B يعطى بالصيغة التالية:

$$\mathbf{P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}\ ;\ P(A) > 0}$$

ونفس الطريقة يعطي الاحتمال الشرطي لـA يعطى بالصيغة التالية:

[1] أحمد عامر عامر[2004]: مرجع سابق، ص 38.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \; ; \; P(B) > 0$$

- إذا كان لدينا n حدث غير مستقل A_1، A_2، A_3 … A_n:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2/A_1) \times P[(A_3/A_1 \cap A_2)] \times \ldots P[(A_n/A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n - 1)]$$

- **خصائص الاحتمال الشرطي:**

من علاقة الاحتمال الشرطي يمكننا استخلاص الحقائق التالية:

$$P(B/B) = 1 \Leftrightarrow P(B/B) = \frac{P(B \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \Leftrightarrow P(\bar{A}/H) = 1 - P(A/H)$$

إذا كان لدينا حدثان متنافيان A وB:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Leftrightarrow P(A \cup B/H) = P(A/H) + P(B/H)$$

إذا كان لدينا حدثان غير متنافيان A وB:

$$A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B/H) = P(A/H) + P(B/H) - P(A \cap B/H)$$

2-3- الاحتمال الكلي ونظرية بايز:

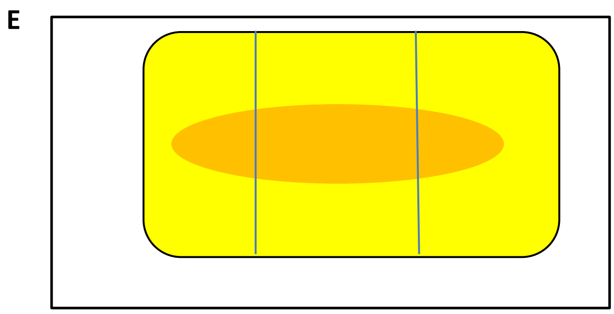
2-3-1- الاحتمال الكلي

ليكن A_1،أوA_2 … A_n، أحداثا متنافية فيما بينها والتي تشكل في مجموعها فضاء الحوادث الأولية Ω تحقق الشروط الثلاثة:

$$\begin{cases} P(A_i) \geq 0 \\ (A_i \cap A_j) = \emptyset \\ (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \Omega \end{cases}$$

وكان لدينا الحدث B يتحقق فقط بتحقق أحد الحوادث A_1أوA_2 … A_n ، أي B حدثا غير مستقل وبمفهوم الاحتمال الشرطي فإن الحدث B مشروط إما بـA_1 أو A_2 أو… A_n، يمكن توضيح ذلك بالشكل التالي:

الشكل(10.1): الاحتمال الكلي



بما أن الحوادث A_1، A_2 ،… A_n، حوادث متنافية، وB هو نتيجة أحد الحوادث السابقة ، فإن الحوادث $(A_1 \cap B)$، $(A_2 \cap B)$… $(A_n \cap B)$ كذلك حوادث متنافية، وبالتالي حسب قاعدة جمع الاحتمالات المتنافية فإن:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) \cup P(A_2 \cap B) \ldots \cup P(An \cap B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)$$

وبما أن B حدثا غير مستقل أي مشروط بـA_1 أو A_2 أو… A_n، فحسب قاعدة ضرب الحوادث غير المستقلة فإن:

$$P(B) = P(A_1) \times P(B/A_1) + P(A_2) \times P(B/A_2) + \cdots + P(A_n) \times P(B/A_n)$$

وعليه يعبر عن الاحتمال الكلي حسب القانون التالي:

$$\mathbf{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B/A_i)}$$

2-3-2- نظرية بايز Bayes Theorem[1]:

تعالج نظرية بايز كيفية حساب الاحتمالات الشرطية لحوادث متنافية تشكل مجموعة كلية ومرافقة للحدث B، إذا كان لدينا A_1 ، A_2 ،… A_n، حوادث متنافية، وكان الحدث B يتحقق فقط بتحقق أحد الحوادث A_1 أو A_2 أو… A_n ، وكان B حدثا غير مستقل أي مشروطا بـA_1 أو A_2 أو… A_n. أراد العالم بايز أن يحسب احتمال حدث نهائيا (هو الأخير في سلسلة الأحداث العشوائية)، انطلاقا من سلسلة من الأحداث الأولية (هي الأولى في سلسلة الأحداث العشوائية) والتي كانت هي مصدر الحدث العشوائي B، بمعنى أن الحدث B يتحقق فقط إذا تحققت أحد الحوادث A_1 ، A_2 ،… A_n.[2]

نظرية **بايز** تجيب على السؤال التالي: علما أن الحدث B وقع فعلا ما هو احتمال أن يكون سببه هو أحد الحوادث الأولية A_1 ، A_2 ،… A_n ؟

لدينا حسب قاعدة ضرب الحوادث غير المستقلة:

$$P(B \cap A_i) = P(B) \times P(A_i/B)$$

حيث $(i = 1,2, \ldots n)$

$$P(A_i \cap B) = P(A_i) \times P(B/A_i)$$

بما أن الضرب تبديلي فإن: $B \cap A_i = A_i \cap B$

وباستخدام قاعدة الضرب الحوادث المستقلة فإن:

$$P(B \cap A_i) = P(A_i \cap B) \Leftrightarrow P(B) \times P(A_i/B) = P(A_i) \times P(B/A_i)$$

إذن:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \times P(B/A_i)}{P(B)}$$

حيث P(B) هو احتمال الحدث الكلي:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) \cup P(A_2 \cap B) \ldots \cup P(An \cap B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)$$

إذن بتعويض P(B) فالصيغة العامة لنظرية بايز تصبح كما يلي:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \times P(B/A_i)}{P(B)} = \frac{P(Ai) \times P(B/Ai)}{P(A_1 \cap B) \cup P(A_2 \cap B) \cup \ldots P(A_n \cap B)} = \frac{P(A_i) \times P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)}$$

[1] D J Wilkinson[SA]:Op,Cit., p. 34- 35.

[2] أحمد بن نبوت[2013]: المبادئ الأولية في الاحتمالات، سوريا، ص 43، متوفر على الرابط:
https://books-library.net/files/books-library.online-01291313Me3B6. pdf(2021/01/21 :شوهد يوم)

$$P(A_i /B) = \frac{P(A_i) \times P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)}$$

أي:

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1).P(B/A_1)}{P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + \cdots + P(A_n).P(B/A_n)}$$

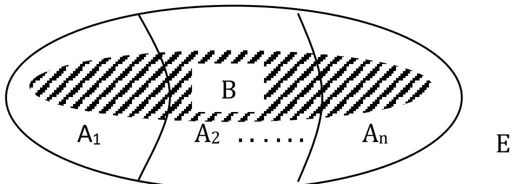
$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_2).P(B/A_2)}{P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + \cdots + P(A_n).P(B/A_n)}$$

$$\vdots$$

$$P(A_n/B) = \frac{P(A_n \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_n)P(B/A_n)}{P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + \cdots + P(A_n).P(B/A_n)}$$

ويمكن تلخيص هذا الاحتمال (السببي) في الشكل التالي:

الشكل(11.1): الاحتمال السببي ونظرية بايز



ملاحظة: يمكن تعميم نظرية بايز، حيث إذا كانت لدينا $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ أحداث عشوائية تنتمي إلى E، وكلها متكاملة بالنسبة إليها، وكان لدينا حدث عشوائي B مرتبط بـ $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ ،فإن:

$$P(A_1/B) + P(A_2/B) + \cdots + P(A_n/B) = 1$$

مثال(42.1): بهدف تقييم درجة الرضا على أداء المرشدين التابعين للوكالات السياحية في موسم الحج لسنة 2019، تم استقصاء آراء 1000 حاج موزعين على ثلاث مناطق، الشرق(E)، الغرب(O)، والجنوب(S)، كان عدد الحجاج الذين شملتهم الدراسة في كل منطقة: 600، 250، 150 على التوالي، نسبة الرضا (M) على الخدمات المقدمة في كل من منطقة الشرق، الغرب، والجنوب هي: 90%، 93%، 97% على التوالي. تم اختيار أحد الحجاج عشوائيا:

1- ما هو احتمال أن يكون الحاج من منطقة:

- الشرق؟ -الغرب؟ -الجنوب؟

2- ترجم هذه المسألة إلى شجرة إحتمالية؟

3- ما هو احتمال أن يكون الحاج من منطقة الجنوب وراض على خدمات المرشدين؟

4- ما هو احتمال أن يكون الحاج غير راض على خدمات المرشدين؟

5- ما هو احتمال أن يكون الحاج راض على خدمات المرشدين؟

6- إذا علمت أن الحاج غير راض فعلا على خدمات المرشدين، ما إحتمال أن يكون من منطقة الشرق؟ الغرب؟ الجنوب؟

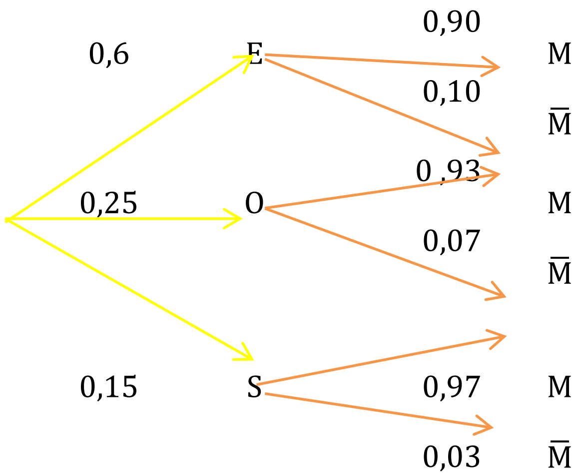
الحل:

1- حساب احتمال أن يكون الحاج من منطقة:

- **الشرق** : $P(E) = \frac{600}{1000} = 0{,}6 = 60\%$
- **الغرب**: $P(O) = \frac{250}{1000} = 0{,}25 = 25\%$
- **الجنوب**: $P(S) = \frac{150}{1000} = 0{,}15 = 15\%$

$\sum Pi = 1$

2- ترجمة المسألة إلى شجرة احتمالية:



E: الحاج من منطقة الشرق.

O: الحاج من منطقة الغرب.

S: الحاج من منطقة الجنوب.

M : الحاج راض على أداء المرشدين.

$\bar{M}$: الحاج غير راض على أداء المرشدين.

3- حساب احتمال أن يكون الحاج من منطقة الجنوب وراض على خدمات المرشدين:

$$P(S \cap M) = P(S) \times P(M/S) = 0{,}15 \times 0{,}97 = 0{,}1455 = \frac{145{,}5}{1000} \cong \frac{146}{1000} \cong 14{,}55\%$$

الشرح: من بين 1000حاج يوجد 146 حاج يكون من منطقة الجنوب وراض على خدمات المرشدين.

4- حساب احتمال أن يكون الحاج من منطقة الغرب وغير راض على خدمات المرشدين:

$$P(O \cap \bar{M}) = P(O) \times P(M/O) = 0{,}25 \times 0{,}07 = 0{,}0175 = \frac{17{,}5}{1000} \cong \frac{18}{1000} \cong 17{,}5\%$$

الشرح: من بين 1000 حاج يوجد 18 حاج يكون من منطقة الغرب وغير راض على خدمات المرشدين.

5- حساب احتمال أن يكون الحاج غير راض على خدمات المرشدين:

$$P(\overline{M}) = P(E \cap \overline{M}) \cup P(O \cap \overline{M}) \cup P(S \cap \overline{M})$$
$$= P(E) \times P(\overline{M}/E) + P(O) \times P(\overline{M}/O) + P(S) \times P(\overline{M}/S)$$
$$= 0{,}6 \times 0{,}10 + 0{,}25 \times 0{,}07 + 0{,}15 \times 0{,}03 = 0{,}06 + 0{,}0175 + 0{,}0045$$
$$= 0{,}082 = 8{,}2\% = \frac{82}{1000}$$

الشرح: من بين 1000 حاج يوجد 82 حاج غير راض على خدمات المرشدين.

6- حساب احتمال أن يكون الحاج راض على خدمات المرشدين وذلك بطريقتين:

- **الطريقة 1**: الحدثان M و$\overline{M}$ حدثان متنافيان أي أن:

$$P(M) + P(\overline{M}) = 1 \leftrightarrow P(M) = 1 - P(\overline{M})$$

$$P(M) = 1 - 0{,}082 = 0{,}918 = \frac{918}{1000}$$

- **الطريقة 2**:

$$\mathbf{P}(M) = P(E \cap M) \cup P(O \cap M) \cup P(S \cup M)$$
$$= P(E) \times P(M/E) + P(O) \times P(M/O) + P(S) \times P(M/S)$$
$$= (0{,}6 \times 0{,}90) + (0{,}25 \times 0{,}93) + (0{,}15 \times 0{,}97) = 0{,}54 + 0{,}2325 + 0{,}1455$$
$$= 0{,}918 = \frac{918}{1000}$$

الشرح: من بين 1000 حاج يوجد 918 حاج راض على خدمات المرشدين.

7- علما أن الحاج غير راض على خدمات المرشدين، حساب احتمال أن يكون من منطقة:

- **الشرق**:

$$P(E/\overline{M}) = \frac{P(E \cap \overline{M})}{P(\overline{M})} = \frac{P(E) \times P(\overline{M}/E)}{P(\overline{M})} = \frac{0{,}6 \times 0{,}10}{0{,}082} = \frac{0{,}06}{0{,}082} = 0{,}732 = \frac{732}{1000}$$

الشرح: من بين 1000 حاج غير راض على خدمات المرشدين، يوجد 732 حاج يكون من منطقة الشرق.

- **الغرب**:

$$P(O/\overline{M}) = \frac{P(O \cap \overline{M})}{P(\overline{M})} = \frac{P(0) \times P(\overline{M}/0)}{P(\overline{M})} = \frac{0{,}25 \times 0{,}07}{0{,}082} = \frac{0{,}0175}{0{,}082} = 0{,}213 = \frac{213}{1000}$$

الشرح: من بين 1000 حاج غير راض على خدمات المرشدين، يوجد 213 حاج يكون من منطقة الغرب.

- الجنوب:

$$P(S/\bar{M}) = \frac{P(S\cap \bar{M})}{P(\bar{M})} = \frac{P(S)\times P(\bar{M}/S)}{P(\bar{M})} = \frac{0,15\times 0,03}{0,082} = \frac{0,0045}{0,082} = 0,055 = \frac{55}{1000}$$

الشرح: من بين 1000 حاج غير راض على خدمات المرشدين، يوجد 55 حاج يكون من منطقة الجنوب.

4-2 بديهيات الاحتمالات Axioms of Probability [1]:

- إن الاحتمال P(A) للحادث A في تجربة عشوائية هو عدد حقيقي معلوم غير سالب يتراوح بين الصفر والواحد:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- إذا كانت Ω هي مجموعة الأساس التي تحوي كل عناصر التجربة العشوائية (الحوادث الممكنة)، فإن Ω تكون بمثابة الحادث المؤكد.

$$P(\Omega) = 1$$

- إذا كان A و $\bar{A}$ حدثان متنافيان في تجربة عشوائية فإن احتمال حدوث A أو $\bar{A}$ هو:

$$P(A\cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega) = 1$$

يمكن تطبيق هذه القاعدة إذا تعلق الأمر بأكثر من حدثين متنافيين، مثل A_1، A_2 ... A_n، فهذا يعني أن:

$$A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j)$$

فإن احتمال ظهور حادث على الأقل من مجموع n حادثا هو:

$$P(A1 \cup A2 \cup \dots \cup An) = P(A1) + P(A2) + \dots + P(An) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

- إذا كان الحادث A_2 يحتوي على الحدث A_1 فإن احتمال أن يكون A_1 أصغر أو يساوي A_2 واحتمال الحادث (A_2-A_1) فهذا يعني أن:

$$A_1 \subset A_2 \rightarrow P(A_2) \geq P(A_1)$$
$$A_1 \subset A_2 \rightarrow P(A_2 - A_1) = P(A_2) - P(A_1)$$

- إن احتمال نفي الحادث A ($\bar{A}$) يساوي (1- احتمال A) أي:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$
$$A \subset S \rightarrow P(S - A) = P(S) - P(A) = 1 - P(A)$$

ولدينا كذلك:

$$S - A = \bar{A}$$

[1] أنظر كلا من:

- أحمد عامر عامر [2004]: مرجع سابق، ص 38.
- Bernard GRAIS [2003] : Op. Cit. , p.18-20
- Vijay K.ROHATGI and Md. EHSANES SALEH [2015] :An Introduction to probability and Statistics, 3rd Ed, John Wiley & Sons Inc, Hoboken, New Jersey, Canada, p. 7-10.

ومنه:

$$P(\overline{A}) = P(S) - P(A) = 1 - P(A) - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$$
$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3)$$
$$+ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) - P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$

- إذا كان الحادث A عبارة عن نتيجة أحد الحوادث المتنافية $A_1, A_2, A_3 \dots A_n$ فإن:

$$A = (A \cap A_1) \cup (A \cap A_2) \cup \dots \cup (A \cap A_n)$$

فإن :

$$P(A) = P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) + \cdots + P(A \cap A_n)$$

3- التحليل التوفيقي(طرق العد)Combinatorial Analysis (Enumeration Methods):

من خلال تطرقنا لمفهوم الاحتمال تبين أن حساب الاحتمال يتطلب معرفة وتحديد كل النتائج الممكنة للتجربة العشوائية (عدد عناصر مجموعة الأساس)بالإضافة إلى عدد النتائج الملائمة (عدد عناصر الحدث العشوائي)، إن هذه المعلومات يمكن لحصول عليها في حالة التجارب العشوائية البسيطة (رمي قطعة نقود مرة واحدة، رمي زهرة نرد مرة واحدة، سحب كرة، سحب كرتان...)، لكن عند تعقد التجارب العشوائية يصبح من الصعب عدّ عناصر مجموعة الأساس وعناصر الحدث العشوائي بسهولة، في هذه الحالة يتم اللجوء إلى طرق وقواعد رياضية تساعد في حساب عدد العناصر وحساب الاحتمال، تسمى هذه الطرق بالتحليل التوفيقي.

فالتحليل التوفيقي عبارة عن طرق رياضية للعدّ والحساب، يهدف إلى تعداد مختلف المجموعة الجزئية التي يمكن تشكيلها انطلاقا من مجموعة الأساس فهو يساعد في عدّ وحصر النتائج الممكنة للتجربة العشوائية والحوادث التي تعذر ايجادها عن طريق العد المباشر، فالتحليل التوفيقي يستعمل من أجل تسهيل حساب عدد عناصر المجموعات في حالة تعذر إيجادها بطريقة مباشرة. وللتحليل علاقة وثيقة بنظرية الاحتمالات، فحساب احتمال وقوع الحدث A يتطلب معرفة العدد الكلي للنتائج الممكنة والنتائج الملائمة، وباستثناء التجارب العشوائية البسيطة لابد من استعمال التحليل التوفيقي. يتلخص التحليل التوفيقي في ثلاث طرق للعدّ تتمثل في : التباديل، التراتيب والتوافيق.

3-1- التباديل Permutations :

التبديلة هي منظومة تشارك فيها كل العناصر ونميز بين نوعين من التباديل، تباديل دون تكرار العناصر وتباديل مع تكرار العناصر وتباديل دائرية.

3-1-1- التباديل دون تكرار:[1]

إذا كان لدينا منظومة مكونة من n عنصر متمايز، فالتبديلة عبارة وضع هذه العناصر في ترتيب معين وكل تغيير في هذا الترتيب يعطي تبديلة جديدة، فالتبديلة هي عبارة عن الترتيب لـ n عنصر، حيث كل عنصر يظهر مرة واحدة فقط. ويرمز للتبديلة بـ P_n وتعطي صيغتها الرياضية بالعلاقة التالية:

$$\mathbf{P_n = (n)(n-1)(n-2)\dots(1) = n!}$$

[1] Bernard GRAIS [2003] : Op. Cit., p. 5.

حيث:

$n!$ (**Factorial**): هي المضروب أو العاملي لعدد صحيح طبيعي n والذي يقرأ " n عاملي" وهو جداء كل الأعداد الطبيعية (الأعداد الصحيحة الموجبة المساوية أو الأصغر من n ما عدا الصفر).

- يمكن تلخيص أهم خواص التبديلة دون تكرار كما يلي:
  - ➢ كل العناصر تشارك في المنظومة؛
  - ➢ الترتيب مهم؛
  - ➢ التكرار غير وارد.

مثال(43.1): بكم طريقة يمكن لخمس أشخاص الجلوس في صف به 5 مقاعد؟

الحل:

- اختيار الكل من الكل (كل العناصر تشارك).
- الترتيب مهم (الترتيب دائما مهم إذا كان الاختيار يتعلق بجميع العناصر أي في التباديل) إذن تبديلة دون تكرار.
- التكرار غير وارد

$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ طريقة

مثال (44.1): بكم طريقة يمكن ترتيب 10 أعلام جزائرية غير متمايزة؟

الحل:

- اختيار الكل من الكل (كل العناصر تشارك).
- الترتيب مهم (الترتيب دائما مهم إذا كان الاختيار يتعلق بجميع العناصر أي في التباديل) إذن تبديلة دون تكرار.
- التكرار غير وارد

$P_{10} = 10! = 10 \times 9 \times \ldots \times 1 = 3\,628\,800$ طريقة

3-1-2- التباديل مع التكرار:

إذا كان لدينا منظومة مكونة من n عنصر متمايز مقسم إلى n_i عنصر غير متمايز حيث $\sum_{i=1}^{k} ni = n1 + n2 + \cdots K$، أي أن المجموعة الكلية تحتوي على مجموعات جزئية، كل مجموعة جزئية تحتوي n_i عنصر أي أن

التبديلة مع التكرار عبارة عن ترتيب n_i مجموعات جزئية من العناصر في المجموعة الأصلية، أي وجود عناصر متشابهة أو مكررة في المجموعة الأصلية. وتعطى صيغتها الرياضية بالعلاقة التالية[1] :

$$\mathbf{P_n^{n_1,n_2,n_3,\dots,n_k} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times n_3! \times \dots \times n_k!}}$$

- يمكن تلخيص أهم خواص التبديلة دون تكرار كما يلي:
  - كل العناصر تشارك في المنظومة؛
  - الترتيب مهم؛
  - التكرار وارد (التكرار يخص عناصر المجموعات الجزئية).

مثال(45.1): بكم طريقة يمكن ترتيب 10 أعلام، 3 أعلام كندية، 3 أمريكية، 2 سويسرية ،1 فلندي و1 هولندي.

الحل:

- اختيار الكل من الكل (كل العناصر تشارك)؛
- الترتيب مهم (الترتيب دائما مهم إذا كان الاختيار يتعلق بجميع العناصر أي في التباديل) إذن تبديلة بتكرار؛
- التكرار وارد.

$$n = 10 \quad \begin{cases} n_1 = 3 \\ n_2 = 3 \\ n_3 = 2 \\ n_4 = 1 \\ n_5 = 1 \end{cases} \qquad n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_4 = 10$$

$$P_{10}^{3,3,2,1,1} = \frac{10!}{3! \times 3! \times 2! \times 1! \times 1!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3! \times 2! \times 1! \times 1!} = \frac{100800}{2}$$
$$= 50400 \text{ طريقة}$$

3-1-3- التباديل الدائرية: إذا كان الترتيب يخص n عنصر في وضعية دائرية فإن عدد الطرق المختلفة لترتيب n عنصر تعطى بالصيغة التالية:

$$P_n = (n-1)!$$

مثال(46.1):بكم طريقة يمكن لمجموعة 7 أشخاص الجلوس حول طاولة مستديرة؟

الحل:

- اختيار الكل من الكل (كل العناصر تشارك)+ الشكل مستدير؛

[1] Ricco Rakotomalala [SA]:Probabilités et Statistique , Notes de cours , Université Lumière Lyon 2 , P.6.disponible sur le lien : http://eric.univ-lyon2.fr/~ricco/cours/cours/Probabilites_et_Statistique.pdf (vu le: 01 /02 /2021)

- الترتيب مهم (الترتيب دائما مهم إذا كان الاختيار يتعلق بجميع العناصر أي في التباديل) تبديلة دائرية؛
- التكرار غير وارد.

طريقة $P_7 = (7-1)! = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

3-2- التوفيقات Combinaison

التوفيقة هي منظومة يشارك فيها جزء من العناصر x من بين n عنصر يمثل المجموعة الكلية $(x < n)$، مع عدم مراعات الترتيب في عملية الاختيار، أي أن سحب العناصر يتم دفعة واحدة (في آن واحد)، ويرمز لها بـ C_n^x .[1]

ويمكن تمييز نوعين من التوفيقات، توفيقات دون تكرار (دون ارجاع العناصر) وتوفيقات مع التكرار (مع ارجاع العناصر).

3-2-1- التوفيقات دون تكرار:

توفيقة دون تكرار هي منظومة يشارك فيها جزء من العناصر x من بين n عنصر يمثل المجموعة الكلية، إذا تم السحب دون إرجاع أي لا يظهر كل عنصر إلا مرة واحدة فقط، فإن عدد التوفيقات التي يمكن تشكيلها من x عنصر من بين n عنصر، تعطى بالعلاقة التالية[2]:

$$\mathbf{C_n^x = \frac{n!}{x!.(n-x)!}}$$

- يمكن تلخيص أهم خواص التوفيقة دون تكرار كما يلي:
  - جزء من العناصر فقط يشارك في المنظومة؛
  - الترتيب غير مهم؛
  - التكرار غير وارد.

مثال (47.1): أراد قسم العلوم الاقتصادية في إحدى الجامعات تعيين لجنة من طالبين كممثلين عن أحد الأقسام المكون من 20 طالب، فكم عدد اللجان التي يمكن تستخرج من هذه الاختيارات ؟

الحل:

- جزء من العناصر يشارك في المنظومة (2 من بين 20)،
- الترتيب غير مهم (السياق)؛
- التكرار غير وارد (السياق).

[1] جان بول ماندي[1986]: الاحتمالات : محاضرات وأعمال موجهة، ترجمة أبو بكر خالد سعد الله، ديوان مطبوعات الجامعية، الجزائر، ص 25.

[2] Bernard GRAIS [2003] :Op. Cit., p.8.

أي عدد الطلبة الممثلين $(x=2)$أقل من عدد طلبة القسم $(n=20)$، كذلك الترتيب غير مهم وبالتالي نستعمل قاعدة التوفيقة دون تكرار وتصبح عدد اللجان الممكنة كما يلي:

$$C_n^x=\frac{n!}{x!\times(n-x)!}=\frac{20!}{2!\times(20-2)!}=\frac{20\times19\times18!}{2!\times(18)!}=\frac{20\times19}{2}=190$$ لجنة

مثال (48.1): تتضمن قائمة 10 مترشحا لانتخابات لجان الخدمات الجامعية من بينهم 4نساء، نختار لجنة من 3 أعضاء دفعة واحدة ودون إرجاع.

- ما هو عدد اللجان الممكن تشكيلها؟
- ما هو احتمال أن تضم اللجنة رجلين على الأكثر؟
- ما هو احتمال أن تضم اللجنة إمرأتين على الأقل؟
- ما هو احتمال أن تتكون اللجنة من النساء فقط؟

الحل:

1- عدد اللجان الممكن تشكيلها:

- اختيار الجزء من الكل (3 من بين 10)؛
- الترتيب غير مهم (السياق)؛
- التكرار غير وارد.(السياق).

توفيقة دون تكرار.

$x=3$ $\qquad$ $n=10$

$$C_n^x=\frac{n!}{x!\,(n-x)!}\rightarrow C_{10}^3=\frac{10!}{3!\,.7!}=C_{10}^3=\frac{10!\times9!\times8!\times7!}{3!\,.7!}=120$$ لجنة محتملة

2- احتمال أن تضم الجنة رجلين على الأكثر:

A: اللجنة تضم رجلين على الأكثر أي:

2 رجال و1 نساء $\qquad$ أو 1 رجل و 2 نساء $\qquad$ 0 رجل و 3 نساء

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{C_6^2.C_4^1+C_6^1.C_4^2+C_6^0.C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{100}{120}$$

الشرح: من بين 120 لجنة ممكنة توجد 100 لجنة تضم رجلين على الأكثر.

B: اللجنة تضم امرأتين على الأقل:

$$P(B)=\frac{|B|}{|\Omega|}=\frac{C_4^2.C_6^1+C_4^3.C_6^0}{C_{10}^3}=\frac{40}{120}$$

الشرح: من بين 120 لجنة ممكنة توجد 40 لجنة تضم امرأتين على الأقل.

C: اللجنة تتكون من النساء فقط.

$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{C_4^3 . C_6^0}{C_{10}^3} = \frac{4}{120}$$

الشرح: من بين 120 لجنة ممكنة توجد 4 لجان تتكون من النساء فقط.

3-2-2- التوفيقات مع التكرار

توفيقة مع التكرار هي منظومة يشارك فيها جزء من العناصر x من بين n عنصر يمثل المجموعة الكلية، إذا تم السحب مع الإرجاع أي يمكن لكل عنصر أن يظهر أكثر من مرة، إن عدد التوفيقات التي يمكن تشكيلها من x عنصر من بين n عنصر، تعطى بالعلاقة التالية[1]:

$$\mathbf{C_n^x = \frac{(n + x - 1)!}{x! . (n - 1)!}}$$

- يمكن تلخيص أهم خواص التوفيقة مع التكرار كما يلي:
  - ➢ جزء من العناصر يشارك في المنظومة؛
  - ➢ الترتيب غير مهم؛
  - ➢ التكرار وارد.

مثال(49.1): أراد مدرب تشكيل فريق كرة قدم من5 لاعب من بين 12 لاعب، وذلك للمشاركة في مباريات الموسم، يمكن لنفس اللاعب المشاركة في أكثر من مباراة (السحب مع الارجاع) ، فما هو عدد الفرق الممكن تشكيلها؟

الحل:

- جزء من العناصر يشارك في المنظومة (5 من 12)؛
- الترتيب غير مهم (السياق)؛
- التكرار وارد (السحب مع الارجاع).

وبالتالي نستعمل قاعدة التوفيقة دون تكرار وتصبح عدد الفرق الممكنة كما يلي:

$$C_n^x = \frac{(n + x - 1)!}{x! . (n - 1)!} = C_{12}^5 = \frac{(12 + 5 - 1)!}{5! \times (12! - 1)!} = \frac{16!}{5! \times 11!} = \frac{16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11!}{5! \times 11!}$$
$$= \frac{524160}{120} = 4368 \text{ فريق}$$

---

[1] Ricco Rakotomalala [SA]:Op . Cit.,p.7.

3-3- الترتيبات Arrangements:

الترتيبة هي منظومة جزئية مؤلفة من x عنصر من مجموعة كلية مكونة من n عنصر حيث $(x < n)$، يشارك فيها جزء من العناصر مع مراعات ترتيبها، وأهمية الترتيب تتحدد وفقا لسياق الحالة (مثلا في الحالات الخاصة بتكوين الأرقام عموما وأرقام السر خصوصا) أو بعض المفردات التي تحددها التجربة (السحب على الترتيب، السحب على التوالي، الأول، الثاني، الثالث...).[1]

ويمكن تحديد نوعين من الترتيبات، الترتيبات دون تكرار والترتيبات مع التكرار.

3-3-1 الترتيبات دون تكرار: [2]

إذا كانت لدينا مجموعة أصلية عدد عناصرها n، ونريد تشكيل منها مجموعة جزئية عدد عناصرها x ، حيث لا يمكن لأي عنصر أن يظهر أكثر من مرة واحدة في نفس الترتيب فإن عدد الحالات الممكنة للترتيب هو عبارة عن ترتيبة دون تكرار، يرمز لها بالرمز A_n^x ،ويمكن التعبير عنها بالعلاقة التالية:

$$\mathbf{A_n^x = \frac{n!}{(n-x)!}}$$

- يمكن تلخيص أهم خواص الترتيبة دون تكرار كما يلي:
  - ➢ جزء من العناصر يشارك في المنظومة؛
  - ➢ الترتيب مهم؛
  - ➢ التكرار غير وارد.

مثال (50.1):لدينا 4 أشخاص نريد أن نختار 2 منهم للمشاركة في الملتقى بحيث يكون الأول: رئيس والثاني نائبه، بكم طريقة يمكن اختيار هذين الشخصين؟

الحل:

- جزء من العناصر يشارك في المنظومة (2 من 4)؛
- الترتيب مهم(الأول، الثاني).
- التكرار غير وارد (السياق).

$x = 2 \qquad n = 4$

$$A_n^x = \frac{n!}{(n-x)!} = A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 12 \text{ طريقة}$$

ملاحظة: التبديلة هي حالة خاصة من الترتيبة لما يكون الجزء يساوي الكل$(x = n)$.

---

[1] بوساحة حورية [2008]: الإحصاء والاحتمالات، المعهد الوطني لتكوين مستخدمي التربية وتحسين مستواهم، وزارة التربية الوطنية، الجزائر، ص99، متوفر على الرابط: https://www.alfreed-ph.com/2017/09/Statistics-and-Probability-pdf.html شوهد يوم(2021/02/02)

[2] Bernard GRAIS [2003]: Op. Cit. , p. 7.

$$P_n = A_n^x = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

3-3-2- الترتيبات مع التكرار

إذا كانت لدينا مجموعة أصلية عدد عناصرها n ، ونريد تشكيل منها مجموعة جزئية عدد عناصرها x ، حيث يمكن لأي عنصر أن يظهر أكثر من مرة واحدة في نفس الترتيب، فإن عدد الحالات الممكنة للترتيب هو عبارة عن ترتيبة مع التكرار، يرمز لها بالرمز A_n^x ، ويمكن التعبير عنها بالعلاقة التالية[1]:

$$\mathbf{A_n^x = n^x}$$

- يمكن تلخيص أهم خواص الترتيبات مع تكرار كما يلي:

➢ جزء من العناصر يشارك في المنظومة؛

➢ الترتيب مهم؛

➢ التكرار وارد.

مثال(51.1): بكم طريقة يمكن تشكيل رقم سري مكون من 4 أرقام في حالة سحب الرقم وإعادة ارجاعه؟

الحل:

- جزء من الكل (4 من 10 أرقام (0،1،2،3،4،5،6،7،8،9))؛
- الترتيب مهم(السياق)؛
- التكرار وارد (السحب مع الإرجاع).

$$A_n^x = n^x = 10^4 = 100000 \text{ رقم السري}$$

- ويمكن تلخيص التحليلي التوفيقي في مجموعة من الأسئلة التي يجب طرحها عندما نكون أمام مسألة خاصة بتحديد طرق العد الممكنة (عدد عناصر مجموعة الأساس) والملائمة (عدد عناصر الحدث العشوائي) :

➢ هل تريد ترتيب كل عناصر أم جزء منها فقط؟

➢ هل ترتيب العناصر داخل مجموعة مهم أم لا؟

➢ هل تكرار العناصر وارد أم غير وارد بمعنى هل السحب مع الإرجاع أو دون ارجاع؟

- الإجابة على أسئلة المسألة الخاصة بالتحليل التوفيقي كما يلي:

[1] D J Wilkinson [SA]:Op. Cit., p. 27 .

مسألة تلخص التحليل التوفيقي

هل يتم سحب الكل من الكل أم الجزء من الكل؟

سحب الكل من الكل أي: $n_{\rightarrow}n$

تبديلة Pn

- تبديلة دون تكرار
  $P_n = n!$
- تبديلة مع $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ التكرار
  $D^{n_1,n_2,\dots,n_k} = \frac{n!}{}$
- تبديلة دائرية (الشكل الدائري أو المستدير)
  $P_n = (n-1)!$

سحب الجزء من الكل أي: $(n \rightarrow x \,/ x < n)$

توفيقة C_n^x أو ترتيبة A_n^x

هل الترتيب مهم أم لا؟

الترتيب غير مهم (السحب دفعة واحدة، السحب في آن واحد.. ، أو حسب السياق)

توفيقة C_n^x

- توفيقة دون تكرار
  $$C_n^x = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}$$
- توفيقة مع التكرار
  $$C_n^x = \frac{(n+x-1)!}{x!\,(n-1)!}$$

الترتيب مهم: (السحب على التوالي، السحب على الترتيب، الأول، الثاني.. .،أو حسب السياق)

ترتيبة A_n^x

- ترتيبة دون تكرار
  $$A_n^x = \frac{n!}{(n-x)!}$$
- ترتيب مع التكرار
  $$A_n^x = n^x$$

تمارين محلولة

التمرين الأول:

تطرح مؤسسة بريد الجزائر البطاقة الذهبية بحيث يتكون رقمها من 14 رقم وحرفين لاتينيين.

- **في حالة أن الرقم السري يتكون من 4 أرقام، أحسب ما يلي (في حالة السحب مع الارجاع ودون ارجاع):**

1- ما هو عدد الأرقام السرية التي يمكن تشكيلها؟

2- حساب عدد الأرقام السرية الممكن تشكيلها بحيث لا يكون الرقم الأول صفرا.

3- حساب عدد الأرقام السرية الممكن تشكيلها بحيث يكون الرقم الأول صفرا.

4- ما هو عدد الأرقام السرية الممكن تشكيلها في حالة احتوائها على الأرقام الزوجية فقط؟

5- ما هو عدد السرية الممكن تشكيلها في حالة احتوائها على الأرقام الفردية فقط؟

- **في حالة أن الرقم السري يحتوي على رقمين وحرفين لاتينيين، أحسب ما يلي في (حالة السحب مع الارجاع ودون ارجاع):**

1- عدد الأرقام السرية الممكن تشكيلها في هذه حالة.

2- في حالة ما إذا كان الرقم السري يبدأ بحرف b ، أحسب عدد الأرقام الممكن تشكيلها في هذه الحالة.

3- في حالة ما إذا كان الرقم السري يبدأ بحرفي b و c، أحسب عدد الأرقام الممكن تشكيلها في هذه الحالة .

4- في حالة الرقم السري يتكون من 10 رقم، أحسب عدد الأرقام السرية الممكن تشكيلها في حالة:

- السحب دون ارجاع.
- السحب مع الارجاع
- امكانية تكرار الرقم 2 ثلاث مرات و 4 مرتين.

الحل:

- **عدد الأرقام السرية الممكن تشكيلها من 4 أرقام:**

في حالة السحب دون ارجاع:

1- عدد الأرقام الممكن تشكيلها:

- اختيار الجزء من الكل (4 من 10)؛
- الترتيب مهم (السياق)؛ ⎫ ترتيبة دون تكرار.
- التكرار غير وارد.

$$A_n^x = \frac{n!}{(n-x)!}$$

$$A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4!)} = \frac{10!}{6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!} = 5040$$ رقم سري

- **عدد الأرقام السرية الممكن تشكيلها من 4 أرقام في حالة**(السحب مع ارجاع):

$$A_n^x = n^x = 10^4 = 10000$$ رقم سري

2- عدد الأرقام السرية الممكن تشكيلها بحيث لا يكون الرقم الأول صفرا مع الارجاع:

$$A_9^1 \times A_{10}^1 \times A_{10}^1 \times A_{10}^1 = A_9^1 \times A_{10}^3 = 9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9 \times 10^3 = 9000$$ رقم سري

- عدد الأرقام السرية الممكن تشكيلها بحيث لا يكون الرقم الأول صفرا دون الارجاع:

$$A_9^1 \times A_9^1 \times A_8^1 \times A_7^1 = 9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$$ رقم سري

أو:

$$A_9^1 \times A_{10}^3 = 9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$$

3- عدد الأرقم السرية الممكن تشكيلها بحيث يكون الرقم الأول صفرا مع الارجاع:

$$A_1^1 \times A_{10}^1 \times A_{10}^1 \times A_{10}^1 = 1 \times 10 \times 10 \times 10 = 1000$$ رقم سري

أو:

$$A_1^1 \times A_{10}^3 = 1 \times 10^3 = 1000$$

- عدد الأرقم السرية الممكن تشكيلها بحيث يكون الرقم الأول صفرا دون ارجاع:

$$A_1^1 \times A_9^1 \times A_8^1 \times A_7^1 = 1 \times 9 \times 8 \times 7 = 504$$ رقم سري

أو:

$$A_1^1 \times A_9^3 = 504$$

4- عدد الأرقام السرية الممكن تشكيلها في حالة احتوائها على الأرقام الفردية فقط دون ارجاع:

- عدد الأرقام الفردية هو خمسة (9،7،5،3،1).

$$A_5^4 = \frac{5!}{(5-4)!} = 5 \text{ أرقام}$$

- عدد الأرقام السرية الممكن تشكيلها في حالة احتوائها على الأرقام الفردية فقط مع ارجاع:

$$A_n^x = n^x = 5^4 = 625 \text{ رقم}$$

5- عدد الأرقام السرية الممكن تشكيلها في حالة احتوائها على الأرقام الزوجية فقط دون ارجاع:

- عدد الأرقام الزوجية هو خمسة (8،6،4،2،0).

$$A_5^4 = \frac{5!}{(5-4)!} = 5 \text{ أرقام}$$

- عدد الأرقام السرية الممكن تشكيلها في حالة احتوائها على الأرقام الزوجية فقط مع الارجاع:

$$A_n^x = n^x = 5^4 = 625 \text{ رقم}$$

- **في حالة أن الرقم السري يحتوي على رقمين وحرفين لاتينيين، أحسب ما يلي في حالة (السحب مع الارجاع ودون ارجاع):**

1- عدد الأرقام السرية الممكن تشكيلها في هذه حالة السحب دون ارجاع.

حساب عدد الأرقام السرية الممكن تشكيلها:

- اختيار الجزء من الكل (2 من 10 وحرفين من 26)؛
- الترتيب مهم (السياق)؛
- التكرار غير وارد.

ترتيبة دون تكرار.

$$A_n^x = \frac{n!}{(n-x)!}$$

- الرقم السري يتكون من رقمين وحرفين لاتينيين:

$$A_{10}^{2} \times A_{26}^{2} = \frac{10!}{(10-2)!} \times \frac{26!}{(26-2)!} = 58800$$

2- عدد الأرقام السرية الممكن تشكيلها في هذه حالة السحب مع الارجاع.

حساب عدد الأرقام السرية الممكن تشكيلها:

- اختيار الجزء من الكل (2من 10 وحرفين من 26)؛
- الترتيب مهم (السياق)؛
- التكرار وارد.

ترتيبة بتكرار

$$A_{n}^{x} = n^{x}$$

- الرقم السري يتكون من رقمين وحرفين لاتينيين:

$$10^{2} \times 26^{2} = 67600 \text{ رقم سري}$$

3- في حالة ما إذا كان الرقم السري يبدأ بحرف b، أحسب عدد الأرقام الممكن تشكيلها:

- **السحب دون الارجاع:**

$$A_{1}^{1} \times A_{25}^{1} \times A_{10}^{2} = 1 \times 25 \times \frac{10\times9\times8!}{8!} = 2250 \text{ رقم سري}$$

- **السحب مع الارجاع:**

$$A_{1}^{1} \times A_{25}^{1} \times A_{10}^{2} = 1 \times 25^{1} \times 10^{2} = 2500 \text{ رقم سري}$$

4- في حالة ما إذا كان الرقم السري يبدأ بحرفي b و c، أحسب عدد الأرقام الممكن تشكيلها في:

- **السحب دون الارجاع:**

$$A_{1}^{1} \times A_{1}^{1} \times A_{10}^{2} = 1 \times 1 \times \frac{10 \times 9 \times 8!}{8!} = 90 \text{ رقم سري}$$

- **السحب مع الارجاع:**

$$A_{1}^{1} \times A_{1}^{1} \times A_{10}^{2} = 1 \times 1 \times 10^{2} = 100 \text{ رقم سري}$$

5- في حالة الرقم السري يتكون من 10 أرقام:

- السحب دون ارجاع:

$P_n = n! = 10! = 3\,628\,800$ رقم سري

- السحب مع الارجاع:

$$A_n^n = n^n = \underbrace{10 \times 10 \times \ 10 \ \times \ldots \times \ 10 \ \times 10 \times \ 10} = 10^{10} = 10000000000$$

6- أحسب عدد الأرقام السرية الممكن تشكيلها مع امكانية تكرار الرقم 2 ثلاث مرات و 4 مرتين؟

- السحب دون ارجاع:

A_1^1	A_1^1	A_1^1	A_1^1	A_1^1					
2	**2**	**2**	**4**	**4**	.	.	.	.	.
أكيدة							A_8^5		

$$A_8^5 = \frac{8!}{3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 6720 \text{ رقم سري}$$

- السحب مع الارجاع:

$A_8^5 = 8^5 = 32768$ رقم سري

التمرين الثاني:

ما هو عدد الكلمات اللاتينية المختلفة (ليس لها معنى) المكونة من 5 حروف الممكن تشكيلها من كلمة "Passport "؟

1- ما هو عدد الكلمات الممكن تشكيلها في حالة تكرار الحروف؟

2- ما هو عدد الكلمات الممكن تشكيلها في حالة عدم تكرار الحروف؟

أ- ما هو عدد الكلمات الممكن تشكلها من أحرف كلمة Passport ؟

ب- ما هو عدد الكلمات الممكن تشكيلها من كلمة Passport والتي تبدأ وتنتهي بحرف S؟

ت- ما هو عدد الكلمات الممكن تشكيلها بحرفين a وتنتهي بـ O؟

الحل:

1- عدد الكلمات الممكن تشكيلها في حالة تكرار الحروف: (ترتيبة دون تكرار).

$$A_n^x = \frac{n!}{(n-x)!} \leftrightarrow A_8^5 = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!}$$

$$= 6720 \text{ كلمة}$$

2- في حالة عدم تكرار الحروف: (ترتيبة بتكرار).

$$A_n^x = n^x \leftrightarrow 8^5 = 32768 \text{ كلمة}$$

أ- عدد الكلمات الممكن تشكيلها من كلمة Passport هي:

- اخيار الكل من الكل(8 من 8)؛
- التكرار وارد؛ مما يعني أنها تبديلة بتكرار.

$P \rightarrow n_1 = 2$
$A \rightarrow n_2 = 1$
$S \rightarrow n_3 = 2$
$O \rightarrow n_4 = 1$
$R \rightarrow n_5 = 1$
$T \rightarrow n_6 = 1$

$$P_n^{n_1,n_2,n_3,n_4,n_5,n_6} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times n_3! \times n_4! \times n_5! \times n_6!}$$

$$= \frac{8!}{2! \times 2! \times 1! \times 1! \times 1! \times 1!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2! \times 1! \times 1! \times 1! \times 1!}$$

$$= 1080 \text{ كلمة}$$

ب- عدد الكلمات الممكن تشكيلها من كلمة Passport والتي تبدأ وتنتهي بحرف S:

$S \rightarrow = 1$ **احتمال أكيد**
$P \rightarrow = 2$
$A \rightarrow = 1$
$O \rightarrow = 1$
$R \rightarrow = 1$
$T \rightarrow = 1$
$S \rightarrow = 1$ **احتمال أكيد**

$$P_n^{n_1,n_2,n_3,n_4,n_5} = \frac{6!}{2! \times 1! \times 1! \times 1! \times 1!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2! \times 1! \times 1! \times 1! \times 1!} = 360$$ كلمة

ت– عدد الكلمات الممكن تشكيلها تبدأ بـA وتنتهي بـO هو:

$A \longrightarrow = 1$ احتمال أكيد

$S \longrightarrow = 2$

$P \longrightarrow = 2$

$R \longrightarrow = 1$

$T \longrightarrow = 1$

$O \longrightarrow = 1$ احتمال أكيد

$$P_n^{n_1,n_2,n_3,n_4} = \frac{6!}{2! \times 2! \times 1! \times 1!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2! \times 1! \times 1!} = 180$$ كلمة

التمرين الثالث:

ترشح أحد الشباب لمسابقتي توظيف واحدة في القطاع العام (A) والأخرى في القطاع الخاص (B)، فإذا كان احتمال أن ينجح في مسابقة القطاع العام هو 0,4 واحتمال أن ينجح في القطاع الخاص هو 0,7، أما احتمال أن ينجح في المسابقتين معا هو 0,2.

المطلوب:

1- ما هو نوع الحدثين : A و B مع التعليل؟

2- ما هو احتمال أن ينجح في القطاع العام أو في القطاع الخاص؟

3- ما هو احتمال أن ينجح في القطاع الخاص فقط؟

4- علما أن هذا المترشح نجح في القطاع العمومي، ما هو احتمال أن ينجح في القطاع الخاص؟

5- علما أن هذا المترشح نجح في القطاع الخاص، ما هو احتمال أن ينجح في القطاع العمومي؟

الحل:

لدينا:

احتمال نجاح المترشح في القطاع العمومي هو: $P(A) = 0{,}4$

احتمال نجاح المترشح في القطاع الخاص هو: $P(B) = 0{,}7$

احتمال نجاح المترشح في القطاعين معا هو: $P(A \cap B) = 0,2$

1- نوع الحدثين A وB: هما حدثان غير متنافيان، لأن تحقق الحدث A لا يمنع تحقق الحدث B وتحقق الحدث B لا يمنع تحقق الحدث A، أي: $P(A \cap B) \neq \emptyset$

وأيضا الحدثان A وB حدثان غير مستقلان لأنه يمكن أن يتحققا في نفس الوقت (وقوع A لا يمنع وقوع B ووقوع B لا يمنع وقوع A). كما يمكن أن يتحقق أحدهما قبل الآخر، ويصبح الوقوع الثاني مشروط بوقوع الأول.

2- حساب احتمال أن ينجح المترشح في القطاع العام (A)أو(B):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,4 + 0,7 - 0,2 = 0,9$$

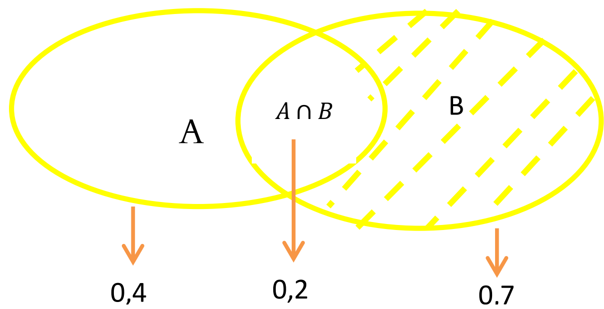
يوجد 90% من الحظوظ للمترشح أن ينجح في القطاع العمومي أو الخاص.

3- حساب احتمال أن ينجح المترشح في القطاع الخاص فقط:

$$P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B) = 0,7 - 0,2 = 0,5$$

4- حساب احتمال أن ينجح المترشح في القطاع الخاص علما أنه نجح في القطاع العمومي:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,2}{0,4} = 0,5$$



الشرح: يوجد 50% من الحظوظ أن يكون المترشح نجح في القطاع الخاص، علما أنه نجح في القطاع العام.

5- حساب احتمال أن ينجح المترشح في القطاع العام، علما أنه نجح في القطاع الخاص:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,2}{0,7} = 0,29$$

الشرح: توجد 29% من الحظوظ أن ينجح المترشح في القطاع العام، علما أنه نجح في القطاع الخاص.

التمرين الرابع:

يطلق على هدف ثلاث طلقات متتالية وليكن الحدث A يمثل إصابة الهدف في الطلقة K حيث: $K = 1,2,3$

باستعمال العمليات على الحوادث أحسب احتمال وقوع الحوادث التالية:

1- إصابة الهدف في الطلقات الثلاث.

2- عدم إصابة الهدف في الطلقات الثلاث.

3- إصابة الهدف مرة واحدة على الأقل.

4- إصابة الهدف مرتين على الأقل.

5- إصابة الهدف بطلقتين فقط.

الحل:

لدينا:

$\mathbf{A_1}$: إصابة الحدث في الطلقة الأولى.

$\boldsymbol{A_2}$: إصابة الحدث في الطلقة الثانية.

$\boldsymbol{A_3}$: إصابة الحدث في الطلقة الثالثة.

- احتمال إصابة هدف في الطلقة K هو $\frac{1}{3}$:

إذن احتمال عدم إصابة هدف في الطلقة K هو $\frac{2}{3}$:

$$P(A_K) = \frac{1}{3} \rightarrow P(\overline{A_K}) = 1 - P(A_K) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

1- حساب احتمال إصابة الهدف في الطلقات الثلاث:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

2- حساب احتمال عدم إصابة الهدف في الطلقات الثلاث:

$$P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

3- حساب احتمال إصابة الهدف مرة واحدة على الأقل:(مرة واحدة أو مرتين أو ثلاث مرات)

$$\begin{aligned}
&[P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) \cup P(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \cup P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3)] \\
&\quad \cup [P(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \cup P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) \cup P(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3)] \\
&\quad \cup [P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)] \\
&\quad = [P(A_1) \times P(\bar{A}_2) \times P(\bar{A}_3)] + [P(\bar{A}_1) \times P(A_2) \times P(\bar{A}_3)] \\
&\quad + [P(\bar{A}_1) \times P(\bar{A}_2) \times P(A_3)] \\
&\quad + \Big[[P(A_1) \times P(A_2) \times P(\bar{A}_3)] + [P(A_1) \times P(\bar{A}_2) \times P(A_3)] \\
&\quad + P\big((\bar{A}_1) \times P(A_2) \times P(A_3)\big)\Big] + [P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3)] \\
&\quad = \left[\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}\right] + \left[\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\right] + \left[\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right] + \left[\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\right] + \left[\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right] \\
&\quad + \left[\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right] + \left[\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right] = \left[\frac{4}{27} + \frac{4}{27} + \frac{4}{27}\right] + \left[\frac{2}{27} + \frac{2}{27} + \frac{2}{27}\right] + \left[\frac{1}{27}\right] \\
&\quad = \frac{19}{27}
\end{aligned}$$

4– حساب احتمال إصابة الهدف مرتين على الأقل (مرتين أو 3 مرات):

$$\begin{aligned}
&[P(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \cup P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) \cup P(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3)] \cup [P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)] \\
&\quad = \Big[[P(A_1) \times P(A_2) \times P(\bar{A}_3)] + [P(A_1) \times P(\bar{A}_2) \times P(A_3)] \\
&\quad + P\big((\bar{A}_1) \times P(A_2) \times P(A_3)\big)\Big] + [P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3)] = \\
&\quad = \left[\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\right] + \left[\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right] + \left[\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right] + \left[\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right] \\
&\quad = \left[\frac{2}{27} + \frac{2}{27} + \frac{2}{27} + \frac{1}{27}\right] = \frac{7}{27}
\end{aligned}$$

5– حساب إصابة الهدف بطلقتين فقط:

$$\begin{aligned}
&P[P(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \cup P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) \cup P(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3)] \\
&\quad = \Big[[P(A_1) \times P(A_2) \times P(\bar{A}_3)] + [P(A_1) \times P(\bar{A}_2) \times P(A_3)] \\
&\quad + P\big((\bar{A}_1) \times P(A_2) \times P(A_3)\big)\Big] = \left[\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\right] + \left[\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right] + \left[\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right] \\
&\quad = \left[\frac{2}{27} + \frac{2}{27} + \frac{2}{27}\right] = \frac{6}{27}
\end{aligned}$$

التمرين الخامس:

ترغب وزارة الداخلية بوضع ترقيم خاص بالسيارات التي تحت تصرفها، حيث يتمثل هذا الترقيم في اختيار حرفين من الحروف الأجنبية $(A, B, C, ..Z)$ يتبعهما ثلاثة أرقام $(0,1,2, ...9)$ حيث لايكون الرقم الأول صفرا (يسمح بتكرار الأرقام) ، فكم عدد اللوحات التي يمكن طبعها؟

الحل:

بالنسبة للحرف الأول فيمكننا اختيار 26 حرفا: $n_1 = 26$ (أي هناك 26 طريقة يمكننا بها اختيار الحرف الأول)، لكن إذا اخترنا حرفا وليكن Z مثلا، الحرف الثاني يبقى لنا اختياره ب25 طريقة (لعدم التكرار)، $n_2 = 25$، هذا عن الأحرف، أما بخصوص الأرقام فالرقم الأول يمكن اختياره ب9 طرق(9...0,1,2) $n_3 = 9$ أما الرقم الثاني فلدينا 10 اختيارات (9...0,1,2) وهو نفس الشيء بالنسبة للرقم الثالث $n_4 = n_5 = 10$.

حرف	حرف	رقم	رقم	رقم
A_{26}^2		A_9^1	A_{10}^2	

إذن: يمكن لوزارة الداخلية طبع 585000 لوحة ترقيم والتي هي حاصل جداء عناصر المجموعات، أي:

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4 \times n_5 = 26 \times 25 \times 9 \times 10 \times 10$$

أو:

$$A_{26}^2 \times A_9^1 \times A_{10}^1 \times A_{10}^1 = \frac{26!}{24!} \times 9 \times 10 \times 10 = 585\,000$$

أو:

$$A_{26}^2 \times A_9^1 \times A_{10}^2 = \frac{26!}{24!} \times 9 \times 10^2 = 585\,000$$

التمرين السادس:

تنوي إحدى شركات الاتصالات إنشاء خطوط هاتفية جديدة في إحدى الدول، حيث يتكون الخط الهاتفي من 7 أرقام.

1- ما هي عدد الخطوط الهاتفية الممكن تشكيلها من الناحية النظرية؟

2- إذا كان الرقم الأول 0 والرقم الثاني 5 ما هو عدد الخطوط الممكن تشكيلها؟

الحل:

1- إيجاد عدد الخطوط الهاتفية الممكن تشكيلها:

نحن أمام ترتيبة مع تكرار، حيث أن: (9...0,1,2) $n = 10$ و$x = 7$، إذن عدد الخطوط الهاتفية الممكن تشكيلها هي:

$$A_n^x = n^x \to A_{10}^7 = 10^7 = 100000000$$

ويمكن الاعتماد على هذا الشكل للتوضيح أكثر:

الخط الهاتفي	الرقم الأول	الرقم الثاني	الرقم الثالث	الرقم الرابع	الرقم الخامس	الرقم السادس	الرقم السابع
	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧
الاختيارات	10	10	10	10	10	10	10

إذن عدد الخطوط الهاتفية الممكن تشكيلها من الناحية النظرية هي جداء الاختيارات، أي:

$$A_n^x = n^x = 10 \times 10 \times \ldots . \times 10 = 10^7$$

2- إذا كان الرقم الأول 0 والرقم الثاني 5:

-كل شركة اتصالات تعتمد الرقم 0 كرقم أول تتبعه برقم ثاني يميزها عن بقية شركات الاتصال الأخرى، في هذه الحالة فأن عدد الخطوط الهاتفية الممكن تشكيلها سينخفض لفرض قيود، ويصبح عدد الخطوط الممكن تشكيلها هو:

$$A_{10}^5 = 10^5 = 1000000$$

$\overbrace{\text{الرقم الثاني } 5}^{1}$	$\overbrace{\text{الرقم الأول } 0}^{1}$
اختيار واحد	اختيار واحد

ويمكن الاعتماد على الشكل السابق للتوضيح أكثر:

الخط الهاتفي	0	5	الرقم الثالث	الرقم الرابع	الرقم الخامس	الرقم السادس	الرقم السابع
	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧	⇧
الاختيارات	1	1	10	10	10	10	10

عدد الخطوط هو:

$$1 \times 1 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5$$

التمرين السابع:

أفادت إحصائيات قامت بها سلطة ضبط البريد والاتصالات الإلكترونية للثلاثي الثاني لسنة 2021، حول جودة خدمة الجيل الرابع التي يقدمها متعاملي الهاتف النقال في الجزائر، أن نسبة المشتركين لكل من المتعاملين: موبليس،

جيزي و أوريدو بلغت : 43%، 30%، 27% على التوالي، وأن نسبة تذبذب خدمات الجيل الرابع لكل متعامل بلغت: 15%، 10%، 20%، وبفرض أن كل زبون مشترك مع متعامل واحد، نختار زبون عشوائيا.

1- ترجم المسألة إلى شجرة احتمالية.

2- ما هو احتمال أن يعاني الزبون من تذبذب في خدمات الجيل الرابع علما أنه من متعاملي شبكة موبليس.

3- ما هو احتمال أن لا يعاني الزبون من تذبذب في خدمات الجيل الرابع علما أنه من متعاملي شبكة جيزي.

4- ما هو احتمال أن يكون الزبون من متعاملي شبكة أوريدو ويعاني من تذبذب في خدمات الجيل الرابع، مع شرح النتيجة.

5- ما هو احتمال أن يكون الزبون من متعاملي شبكة جيزي ولا يعاني من تذبذب في خدمات الجيل الرابع، مع شرح النتيجة.

6- ما هو احتمال أن يعاني الزبون من تذبذب في خدمات الجيل الرابع مع شرح النتيجة، مع شرح النتيجة.

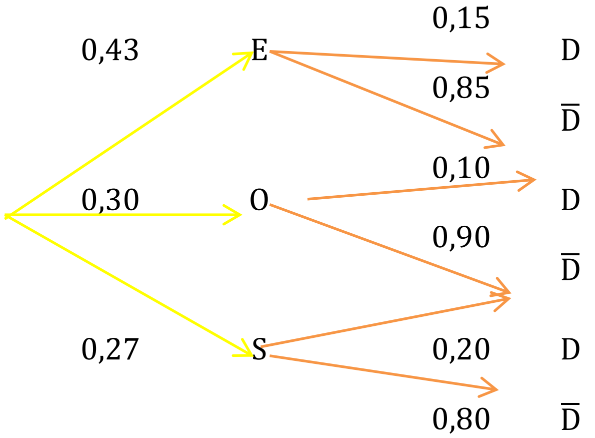
7- ما هو احتمال أن لا يعاني الزبون من تذبذب في خدمات الجيل الرابع، مع شرح النتيجة.

8- علما أن هذا الزبون يعاني من تذبذب في خدمات الجيل الرابع ما هو احتمال أن يكون:

أ- من متعاملي موبيليس؟ ب- جيزي؟ ج- أوريدو؟ مع شرح النتيجة.

الحل:

1- ترجمة المسألة إلى شجرة احتمالية:



Mob: المتعامل مشترك مع موبليس

Dj: المتعامل مشترك مع جيزي

Or: المتعامل مشترك مع أوريدو

$P(Mob) = 0{,}43$, $P(Dj) = 0{,}30$, $P(Or) = 0{,}27$

$P(D/Mob) = 0{,}15$ $P(\overline{D}/Mob) = 0{,}85$ $\sum Pi = 1$	$P(D/Dj) = 0{,}10$ $P(\overline{D}/Dj) = 0{,}90$ $\sum Pi = 1$	$P(D/Or) = 0{,}20$ $P(\overline{D}/Or) = 0{,}80$ $\sum Pi = 1$

2– حساب احتمال أن يعاني الزبون من تذبذب في خدمات الجيل الرابع علما أنه من متعاملي شبكة موبليس:

$$P(D/Mob) = 0{,}15$$

3– حساب احتمال أن لا يعاني الزبون من تذبذب في خدمات الجيل الرابع علما أنه من متعاملي شبكة جيزي:

$$P(\overline{D}/Dj) = 0{,}90$$

4– ما هو احتمال أن يكون الزبون من متعاملي شبكة أوريدو ويعاني من تذبذب في خدمات الجيل الرابع:

$$P(Or \cap D) = P(Or) \times P(D/Or) = 0{,}27 \times 0{,}20 = 0{,}054 = \frac{450}{10000}$$

شرح النتيجة: من بين 10000 متعامل يوجد 450 متعامل مشترك مع أوريدو ويعاني من تذبذب في خدمات الجيل الرابع.

5– ما هو احتمال أن يكون الزبون من متعاملي شبكة جيزي ولا يعاني من تذبذب في خدمات الجيل الرابع:

$$P(Dj \cap D) = P(Dj) \times P(\overline{D}/Dj) = 0{,}30 \times 0{,}90 = 0{,}27 = \frac{2700}{10000}$$

شرح النتيجة: من بين 10000 متعامل يوجد 2700 متعامل مشترك مع جيزي ولا يعاني من تذبذب في خدمات الجيل الرابع.

6– حساب احتمال أن يعاني الزبون من تذبذب في خدمات الجيل الرابع:

$$\begin{aligned}P(D) &= P(Mob \cap D) \cup P(Dj \cap D) \cup P(Or \cap D)\\ &= P(Mob) \times P\left(\frac{D}{Mob}\right) + P(Dj) \times P\left(\frac{D}{Dj}\right) \times P(Or) \times P(Or) \times P\left(\frac{D}{Or}\right)\\ &= (0{,}43 \times 0{,}15) + (0{,}3 \times 0{,}10) + (0{,}27 \times 0{,}20)\\ &= 0{,}0645 + 0{,}03 + 0{,}054 = 0{,}1485 = \frac{1485}{10000}\end{aligned}$$

شرح النتيجة: من بين 10000 متعامل يوجد 1485 متعامل مشترك يعاني من تذبذب في خدمات الجيل الرابع.

7- ما هو احتمال أن لا يعاني الزبون من تذبذب في خدمات الجيل الرابع:

$$P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0{,}1845 = 0{,}8515 = \frac{8515}{10000}$$

شرح النتيجة: من بين 10000 متعامل يوجد8515 متعامل مشترك لا يعاني من تذبذب في خدمات الجيل الرابع.

8- علما أن هذا الزبون يعاني من تذبذب في خدمات الجيل الرابع ما هو احتمال أن يكون:

أ- احتمال أن يكون الزبون من متعاملي **موبليس** علما أنه يعاني من تذبذب خدمات الجيل الرابع:

$$P(Mob/D) = \frac{P(Mob \cap D)}{P(D)} = \frac{P(Mob) \times P(D/Mob)}{P(D)} = \frac{0{,}43 \times 0{,}15}{0{,}1484} = 0{,}43$$
$$= \frac{43000}{10000}$$

شرح النتيجة: من بين 10000 زبون يعاني من تذبذب في خدمات الجيل الرابع يوجد 4300 متعامل مشترك في موبليس.

ب- احتمال أن يكون الزبون من متعاملي **جيزي** علما أنه يعاني من تذبذب خدمات الجيل الرابع:

$$P(Dj/D) = \frac{P(Dj \cap D)}{P(D)} = \frac{P(Dj) \times P(D/Dj)}{P(D)} = \frac{0{,}3 \times 0{,}10}{0{,}1484} = 0{,}20 = \frac{20000}{10000}$$

شرح النتيجة: من بين 10000 زبون يعاني من تذبذب في خدمات الجيل الرابع يوجد 2000 متعامل مشترك في جيزي.

ج- احتمال أن يكون الزبون من متعاملي **أوريدو** علما أنه يعاني من تذبذب خدمات الجيل الرابع:

$$P(Or/D) = \frac{P(Or \cap D)}{P(D)} = \frac{P(Or) \times P(D/Or)}{P(D)} = \frac{0{,}27 \times 0{,}20}{0{,}1484} = 0{,}37 = \frac{37000}{10000}$$

شرح النتيجة: من بين 10000 زبون يعاني من تذبذب في خدمات الجيل الرابع يوجد 3700 متعامل مشترك في أوريدو.

التمرين الثامن:

تحتوي ورقة امتحان على 8 أسئلة وعلى الطالب أن يجيب على 6 منها بشرط أن تتضمن سؤالين على الأقل من الأربعة الأولى، فكم طريقة يمكن بها للطالب اختيار الأسئلة؟

نلاحظ أن الطرق ستكون (سؤالين من ال 4 و 4 أسئلة من الـ4 المتبقية أو 3 أسئلة من الأربعة الأولى و3 أسئلة من الأربعة المتبقية أو 4 من الأسئلة الأولى وسؤالين من 4 المتبقية).

الحل:

$$(C_4^2 \times C_4^4) + (C_4^3 \times C_4^3) + (C_4^4 \times C_4^2) = 28$$

التمرين التاسع:

يصنف الجدول التالي 400 شخص حسب عادة التدخين ومستوى ضغط الدم كالتالي:

	يدخن$\mathbf{D}$	لا يدخن$\overline{\mathbf{D}}$	المجموع
A ضغط مرتفع	40	10	50
B ضغط متوسط	70	130	200
C ضغط منخفض	55	95	150
المجموع	165	235	400

فإذا تم اختيار أحد هؤلاء الأشخاص بشكل عشوائي، حيث:

A: تمثل حادثة اختيار شخص ضغط دمه مرتفع.

D: تمثل حادثة اختيار شخص مدخن.

أوجد احتمال أن الشخص المختار:

1- ضغط دمه مرتفع.
2- مدخن.
3- ضغط دمه مرتفع ويدخن.
4- ضغط دمه مرتفع علما بأنه مدخن.
5- علما أن ضغط دمه مرتفع ما هو احتمال أن يكون من المدخنين؟

الحل:

$|\Omega| = 400$ شخص

1- حساب احتمال أن يكون الشخص ضغطه مرتفع:

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{50}{400}=0{,}125$$

أو:

$$\begin{aligned}\mathrm{P(A)} &= \mathrm{P(D\cap A)\cup P(\bar{D}\cap A)=P(D)\times P(A/D)+P(\bar{D})\times P(A/\bar{D})}\\ &=\left(\frac{165}{400}\times\frac{40}{165}\right)+\left(\frac{235}{400}\times\frac{10}{235}\right)=\frac{40}{400}+\frac{10}{400}=\frac{50}{400}=0{,}125\end{aligned}$$

2- احتمال أنه مدخن:

$$\mathrm{P(D)}=\frac{|\mathrm{D}|}{|\Omega|}=\frac{165}{400}=0{,}4125$$

أو:

$$\mathrm{P(D)=P(D\cap A)\cup P(D\cap B)\cup P(D\cap C)}=\frac{40}{400}+\frac{70}{400}+\frac{55}{400}=\frac{165}{400}=0{,}4125$$

أو:

$$\begin{aligned}\mathrm{P(D)} &= \mathrm{P(D\cap A)\cup P(D\cap B)\cup P(D\cap C)}\\ &=\mathrm{P(D)}\times\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{D}}\right)+\mathrm{P(D)}\times\left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{D}}\right)+\mathrm{P(D)}\times\left(\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}}\right)\\ &=\left(\frac{165}{400}\times\frac{40}{165}\right)+\left(\frac{165}{400}\times\frac{70}{165}\right)+\left(\frac{165}{400}\times\frac{55}{165}\right)=0{,}4125\end{aligned}$$

3- احتمال أن ضغط دمه مرتفع ومدخن:

$$\mathrm{P(A\cap D)}=\frac{|\mathrm{A\cap D}|}{|\Omega|}=\frac{40}{400}=0{,}1$$

أو:

$$\mathrm{P(A\cap D)=P(A)\times P}\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{D}}\right)=\frac{50}{400}\times\frac{40}{50}=\frac{40}{400}=0{,}1$$

4- احتمال أن ضغط دمه مرتفع علما أنه مدخن:

$$P(A/D)=\frac{|A\cap D|}{|D|}=\frac{40}{165}=0{,}2424$$

أو:

$$P(A/D)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}=\frac{\frac{40}{400}}{\frac{165}{400}}=\frac{0{,}1}{0{,}4125}=0{,}2424$$

أو:

$$P(A/D)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}=\frac{P(A)\times P(D/A)}{P(D)}=\frac{P(A)\times P(D/A)}{P(D\cap A)\cup P(D\cap B)\cup P(D\cap C)}$$
$$=\frac{P(A)\times P(D/A)}{P(D)\times (A/D)+P(D)\times (B/D)+P(D)\times (C/D)}$$
$$=\frac{\frac{50}{400}\times\frac{40}{50}}{\left(\frac{165}{400}\times\frac{40}{165}\right)+\left(\frac{165}{400}\times\frac{70}{165}\right)+\left(\frac{165}{400}\times\frac{55}{165}\right)}=\frac{\frac{40}{400}}{\frac{165}{400}}=\frac{40}{165}$$
$$=0{,}2424$$

5- علما أن ضغط دمه مرتفع ما هو احتمال أن يكون من المدخنين:

$$P(D/A)=\frac{40}{50}=0{,}8$$

أو:

$$P(D/A)=\frac{P(D\cap A)}{P(A)}=\frac{P(D)\times P(A/D)}{P(A\cap D)\cup P(A\cap \overline{D})}=\frac{P(D)\times P(A/D)}{P(A)\times P(D/A)+P(A)\times (\overline{D}/A)}$$
$$=\frac{\frac{165}{400}\times\frac{40}{165}}{\left(\frac{50}{400}\times\frac{40}{50}\right)+\left(\frac{50}{400}\times\frac{10}{50}\right)}=\frac{40}{50}=0{,}8$$

التمرين العاشر:

الجدول التالي يبين نتائج التحاليل الطبية لثلاثة مخابر خلال فترة زمنية معينة مصنفة كالتالي:

المخابر / نتيجة التحاليل	A	B	C	المجموع
خطأ (F)	5	2	3	10
صحيح(T)	25	28	27	80
المجموع	30	30	30	90

1- إذا اختير مختبر عشوائي وسحب منه تحليل واحد فما احتمال أن يكون من المختبرA، B، C.

2- إذا اختير مختبر عشوائي وسحب منه تحليل واحد فما احتمال أن يكون خطأ.

3- إذا علمت أن التحليل خطأ فما هو احتمال أنه سحب من المختبر A.

الحل:

1- A : ترمز إلى المختبر الأول، B ترمز إلى المختبر الثاني، C ترمز إلى المختبر الثالث، وF تشير إلى أن التحليل الخطأ.

$$P(A) = \frac{|A|}{|E|} = \frac{(5+25)}{90} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$$

$$P(B) = \frac{|B|}{|E|} = \frac{(2+28)}{90} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$$

$$P(C) = \frac{|C|}{|E|} = \frac{(3+27)}{90} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$$

2- احتمال أن يكون التحليل خاطئ:

1- إذا اختير مختبر عشوائي وسحب منه تحليل واحد فإن احتمال أن يكون خطأ هو:

$$\begin{aligned} P(F) &= P(A \cap F) \cup P(B \cap F) \cup P(C \cap F) \\ &= P(A) \times P(F/A) + P(B) \times P(F/B) + P(C) \times P(F/C) \\ &= \left(\frac{30}{90} \times \frac{5}{30}\right) + \left(\frac{30}{90} \times \frac{2}{30}\right) + \left(\frac{30}{90} \times \frac{3}{30}\right) = 0{,}11 \end{aligned}$$

2- إذا علمت أن التحليل خطأ فإن احتمال أنه سحب من المختبر A هو:

$$P(A/F) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{5}{90}}{\frac{10}{90}} = \frac{5}{10} = 0{,}5$$

التمرين الحادي عشر:

يحتوي صندوق على 4 قريصات حمراء (ثلاثة شكلها مثلث وواحدة شكلها مربع) و 3 قريصات بيضاء (اثنان شكلها مثلث وواحدة شكلها مربع).

1- نسحب على التوالي 4 قريصات من الصندوق وبدون إعادة القريصة إلى الصندوق.

1-1-ما هو عدد إجمالي الحالات الممكنة؟

1-2-احتمال الحصول على قريصة بيضاء واحدة شكلها مثلث وفي السحبة الأولى.

1-3-احتمال الحصول على القريصة الأولى حمراء شكلها مربع والقريصات الثلاثة حمراء وشكلها مثلث.

1-4-احتمال الحصول على القريصات الثلاثة الأولى حمراء وشكلها مثلث والقريصة الرابعة بيضاء شكلها مربع

2- نسحب هذه المرة ثلاث قريصات في آن واحد:

2-1- ما هو عدد الحالات الممكنة؟

2-2-احتمال الحصول على 3 قريصات من نفس الشكل.

2-**3**- احتمال الحصول على 3 قريصات من نفس اللون.

2-4- احتمال الحصول على قريصة شكلها مربع واثنين حمراوين وشكلهما مثلث.

2-5- احتمال الحصول على الأكثر قريصتين شكل كل واحد منها مربع.

الحل:

1–نسحب على التوالي 4 قريصات من الصندوق وبدون إعادة القريصة إلى الصندوق ويعني:

- جزء من الكل (4 من 7)؛
- السحب على التوالي (الترتيب مهم)؛
- التكرار غير وارد (دون ارجاع).

ترتيبة دون تكرار

$$A_n^x = \frac{n!}{(n-x)!} = \Omega$$

1-1- إجمالي عدد الحالات الممكنة:

$$A_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7\times6\times5\times4\times3!}{3!} = 840$$

A-2-1: احتمال الحصول على قريصة بيضاء واحدة شكلها مثلث وفي السحبة الأولى.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{A_2^1 \times A_5^3}{A_7^4} = \frac{2\times60}{840} = 120$$

3-1-B: احتمال الحصول على القريصة الأولى حمراء شكلها مربع والقريصات الثلاثة حمراء وشكلها مثلث:

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{A_1^1 \times A_3^3}{A_7^4} = \frac{1\times6}{840} = \frac{6}{840}$$

4-1- C: احتمال الحصول على القريصات الثلاثة الأولى حمراء وشكلها مثلث والقريصة الرابعة بيضاء شكلها مربع:

$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{A_3^3 \times A_1^1}{A_7^4} = \frac{6}{840}$$

2- نسحب هذه المرة ثلاث قريصات في آن واحد:

- جزء من الكل (3 من 7)؛
- السحب في آن واحد؛
- التكرار غير وارد (دون ارجاع).

توفيقة دون تكرار.

$$C_n^x = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}$$

1-2- عدد الحالات الممكنة هو:

$$\Omega = A_7^3 = -$$

2-2- A: احتمال الحصول على 3 قريصات من نفس الشكل هو:

$$P(A) = \frac{C_5^3 + C_2^0}{C_7^3} =$$

3-2- B: احتمال الحصول على 3 قريصات من نفس اللون هو:

$$P(B) = \frac{C_4^3 + C_3^3}{C_7^3} =$$

-4-2 C: احتمال الحصول على قريصة شكلها مربع واثنين حمراوين وشكلهما مثلث هو:

$$P(C)=\frac{C_2^1+C_3^2}{C_7^3}=$$

-5-2 D: احتمال الحصول على الأكثر قريصتين شكل كل واحد منها مربع هو:

(2 قريصات شكلها مربع) أو (1 قريصة شكلها مربع) أو (0 قريصة شكلها مربع)

$$C_2^2\times C_5^1 \qquad C_2^1\times C_5^2 \qquad C_2^0\times C_5^3$$

$$P(D)=\frac{C_2^0\times C_5^3+C_2^1\times C_5^2+C_2^2\times C_5^1}{C_7^3}=$$

التمرين الثاني عشر:

نعتبر كل التبديلات ذات 5 أرقام المكونة من الأرقام التالية: 1، 2، 3، 4، 5.

1- ما هو عدد هذه التبديلات؟

2- باستعمال الأرقام السابقة أحسب عدد الأرقام المكونة من 3 أرقام مختلفة.

3- ما هو عدد الأعداد المشار إليها في السؤال 2؟ والتي هي:

أ- من مضاعفات 2.

ب- أكبر من 300.

ت- رقم عشرتها عدد فردي.

ث- تحتوي على الرقم 3.

الحل:

1- ما هو عدد هذه التبديلات؟

$$P_n=5!=120$$

2- باستعمال الأرقام السابقة أحسب عدد الأرقام المكونة من 3 أرقام مختلفة.

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

4- ما هو عدد الأعداد المشار إليها في السؤال 2؟ والتي هي:

3- من مضاعفات 2.

...	...	4	أو	...	...	2
		حدث أكيد				حدث أكيد

$$(A_4^2 \times A_1^1) + (A_4^2 \times A_1^1) = 24$$

4- أكبر من أو تساوي 300.

مئات	عشرات	آحاد
A_3^1	A_4^2	

$$A_3^1 \times A_4^2 = 3 \times 12 = 36$$

5- رقم عشراتها عدد فردي(1،3،5).

$$A_3^1 \times A_4^2 = 36$$

$$3(A_1^1 \times A_4^2) = 36$$

6- تحتوي على الرقم 3 (الرقم 3 يكون في الآحاد أو العشرات أو المئات).

$$(A_1^1 \times A_4^2) + (A_1^1 \times A_4^2) + (A_1^1 \times A_4^2) = 3(A_1^1 \times A_4^2) = 36$$

التمرين الثالث عشر:

عدد المشاركين في السباق النهائي للعدو الريفي هو 15 منهم: 3 جزائريين، 5 فرنسيين، 4 أمريكيين، 3 فلسطينين.

1- ما هو عدد نتائج السباق (نقصد ترتيب 15 مشاركا بحيث لا توجد فيها رتب متساوية).

2- ما هو عدد نتائج السباق في الحالات الآتية:

أ- الرتب الثلاثة الأولى للجزائريين.

ب- الرتبة الأولى للجزائري والرتب 4،3،2 للفرنسيين.

ج- الرتبة الأولى والثانية للفلسطينيين والثالثة والرابعة للجزائريين مع امتناع الفرنسيين عن المشاركة.

د- الرتب الثلاثة الأولى للفلسطينيين والجزائريين والرتب الخمسة الأخيرة للفرنسيين

الحل:

لدينا:

- كل العناصر تشارك؛
- اختيار الكل من الكل؛ ← تبديلة دون تكرار
- التكرار غير وارد (لا توجد رتب متساوية).

$$P_n^{n_1,n_2,n_3,n_4} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times n_3! \times n_4!}$$

$$P_{15}^{3,5,4,3} = \frac{15!}{3! \times 5! \times 4! \times 3!}$$

$$P_n = P_{15} = 15!$$

1- عدد نتائج السباق هو:

$$A_{15}^{15} = 15! = 15 \times 14 \times \dots \times 1$$

2- عدد نتائج السباق في هذه الحالة:

أ- الرتب الثلاثة الأولى للجزائريين:

$$A_3^3 \times A_{12}^{12} = 3! \times 12!$$

ب- الرتبة الأولى للجزائري والرتب 2،3،4، للفرنسيين:

$$A_3^1 \times A_5^3 \times 11 = 180 \times 11!$$

ج- الرتبة الأولى والثانية للفلسطينيين والثالثة والرابعة للجزائريين مع امتناع الفرنسيين عن المشاركة:

$$A_3^2 \times A_3^2 \times 6 = 36 \times 6!$$

د- إذا رمزنا للفلسطيني بـP والجزائري بـ A، فتكون الرتب الثلاثة الأولى للفلسطينيين والجزائريين كما يلي:

$$(A, A, P), (A, P, A), (P, A, A), (P, P, A), (P, A, P), (A, P, P)$$

ويكون عدد نتائج السباق في هذه الحالة كالتالي:

$$6 \times (A_3^2 \times A_3^1) \times 5! \times 7! = 108 \times 5! \times 7!$$

التمرين الرابع عشر:

تحتوي إحدى علب الحلوى على 100 قطعة ذات ستة ألوان (أصفر، أزرق، برتقالي، أخضر، أحمر، بني)، حيث هنالك 24 قطعة حلوى ذات لون برتقالي، 18 ذات اللون الأخضر، 12 ذات اللون البني، 18 ذات اللون الأزرق، 14 ذات اللون الأحمر، 14 ذات اللون الأصفر.

لنفرض أن رجلا كفيفا (لا يرى) طلب منك أن تختار له ثلاث قطع من الحلو، أوجد عدد الخيارات الممكنة حسب لون الحلوى؟

الحل:

لدينا:

- الجزء من الكل؛
- الترتيب لا يهم (من السياق)؛
- التكرار غير وارد (السياق).

توفيقة دون تكرار

$$C_n^x = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}$$

$$|\Omega| = C_{100}^3 = \frac{100!}{3!\,97!} = \frac{100 \times 99 \times 89 \times 97!}{3!\,97!} = 161700$$

- لاختيار 3 قطع الحلوى يوجد ثلا حالات:

1- القطع الثلاثة من نفس اللون:

$$P(A) = \frac{C_{24}^3 + C_{18}^3 + C_{12}^3 + C_{18}^3 + C_{14}^3 + C_{14}^3}{C_{100}^3} =$$

2- قطعتين من نفس اللون وقطعة مختلفة:

$$P(B) = \frac{C_{24}^{2} \times C_{76}^{1} + C_{18}^{2} \times C_{82}^{1} + C_{12}^{2} \times C_{88}^{1} + C_{18}^{2} \times C_{88}^{1} + C_{14}^{2} \times C_{86}^{1} + C_{14}^{2} \times C_{86}^{1}}{C_{100}^{3}}$$

$$=$$

3- ليس كل القطع من نفس اللون:

$$P(C) = 1 - P(A) = \frac{C_{24}^{3} + C_{18}^{3} + C_{12}^{3} + C_{18}^{3} + C_{14}^{3} + C_{14}^{3}}{C_{100}^{3}} =$$

الفصــل الثاني

المتغيرات العشوائية

1- التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منفصل

2- التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متصل

3- معالم المتغير العشوائي (منفصل ،متصل)

تمهيد:

كل تجربة احتمالية تؤدي إلى مجموعة من الحوادث الأولية لكن ليس بالضرورة أن تكون تلك النتائج عددية[1]. بل إن المتغيرات العشوائية تختلف عن المتغيرات العادية التي تظهر في الدوال الرياضية والمعادلات والعلاقات الفيزيائية وما إلى ذلك. ونلجأ إلى هذه المتغيرات بهدف معالجة المجموعات الاحتمالية معالجة كمية وبالتالي يمكن إيجاد بعض الإحصائيات الخاصة بالمتغيرة العشوائية.[2]

في الواقع نصادف المتغير العشوائي في مجموعة من الظواهر، ففي الظواهر الكمية مثل دراسة الطول أو الوزن أو عدد الذكور...إلخ يرمز للمتغير بالرمز x ويأخذ قيمه في مجموعة الأعداد الحقيقية ، أما في الظواهر الكيفية (النوعية أو الوصفية) كالمستوى التعليمي أو الجنس(ذكر أو أنثى) فعادة ما يسمى بأعداد معينة مثل عملية تحديد الجنس إذا كان ذكر يرمز لـ x بالواحد (1)و الأنثى بالصفر(0) ،أي أن كل تجربة لظاهرة سواء كمية أو كيفية كل قيم المتغير فيها كمية[3].

1- تعريف المتغير العشوائي وأنواعه:

1-1- تعريف المتغير العشوائي

المتغير العشوائي هو دالة رياضية X ترافق كل نتيجة من نتائج التجربة العشوائية (العناصر والمجموعات الجزئية في مجموعة الأساس (Ω) بعدد حقيقي، بحيث كل نتيجة من نتائج التجربة يحول إلى قيمة حقيقية واحدة فقط حسب تعريف المتغير العشوائي في التجربة. وهو خاصية تتميز بها نتائج تجربة عشوائية معينة وتختلف قيمته من تجربة إلى أخرى حسب طبيعة النتائج في فراغ عينة التجربة العشوائية (في مجموعة الأساس Ω) قيد الدراسة[4]، إذا فالمتغير العشوائي عبارة عن دالة مجالها فراغ العينة لتجربة عشوائية ومجالها المقابل هو مجموعة الأعداد الحقيقية ومداها هو مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

[1] عبد الحفيظ مصطفى [2008]:مرجع سابق، ص 162.
[2]بشير عبد الكريم[2006]: مرجع سابق، ص 103.
[3]العمري علي وآخرون [2021]:ملخص محاضرات الإحصاء 2، مدعم بأمثلة تطبيقية، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة البويرة ، الجزائر، ص 16.
[4] لحسن عبد الله باشيوة[2014]: مرجع سابق، ص111.

والعشوائية في الاحتمالات لا يقصد بها الاعتباطية بل يقصد بها عدم القدرة على التنبؤ بالنتائج مسبقا وإعطاء الفرصة لجميع العناصر للظهور في التجربة، كما سمي المتغير بالعشوائي لأن قيمته تختلف من تجربة لأخرى وتعتمد على الحظ[1].

في المقابل يكون **التعريف الرياضي** للمتغير العشوائي هو إرفاق كل عنصر من فضاء العينة بقيمة حقيقية، فنكون بذلك عرفنا دالة على هذا الفضاء، وتسمى هذه الدالة بالمتغيرة العشوائية، أي: $X: \Omega \to \mathbb{R}$

ويرمز لها بحروف لاتينية كبيرة ك ($X, Y ...$)، ويرمز بالحروف اللاتينية الصغيرة للقيم العددية التي يأخذها المتغير العشوائي، ك ($x_i, y_i, ...$)[2] حيث أن هذه القيم تكون مقترنة بالاحتمالات معينة.[3]

مثال(01.2): عائلة تتكون من ثلاثة أولاد، ليكن المتغير العشوائي X يمثل عدد الإناث :

X: عدد الإناث

إذا تم ترميز الذكور بـB والإناث بـG فتكون قيم المتغير العشوائي كالتالي:

X	GGG	BGG	GBG	GGB	BBG	BGB	GBB	BBB
Xi	0	1	1	1	2	2	2	3

بهذا تم تعريف المتغير العشوائي X في المجال: $\Omega = [0,1,2,3]$

1-2- أنواع المتغيرات العشوائية:

تنقسم المتغيرات العشوائية إلى قسمين: المتغيرات العشوائية المنفصلة (المتقطعة) والمتغيرات العشوائية المتصلة (مستمرة).

1-2-1 المتغيرات العشوائية المنفصلة (المتقطعة): Discrete Random Variable

نقول عن متغير عشوائي أنه منفصل إذا كان بإمكانه أخذ عددا محدودا ومنته من القيم المنفصلة والمتمايزة عن بعضها البعض، كالقيم الآتية: $X \in \Omega = [0,1,2,3, \dots, n]$

[1] Neil A et Weiss [2017]:Introductory Statistics, Pearson 10th Ed, Edinburgh, London, p.247.

[2] بشير عبد الكريم [2006]: مرجع سابق، ص103.

[3] عبد الهادي الرفاعي[دون سنة]: التوزيعات الاحتمالية، مقرر الاحصاء التطبيقي ،كلية العلوم الادارية، سوريا، ص 26. متوفر على الرابط:

مثال (02.2): عدد قطع حلوى الشكولاتة الموجودة في علبة، عدد الزبائن المتوافدين على مطعم ما خلال يوما ما، عدد الاناث في كلية الاقتصاد، أو عدد الذكور في أسرة معينة، عدد السيارات...

1-2-2- المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة):Continuous Random Variable

نقول عن متغير عشوائي أنه متصل إذا كان بإمكانه أخذ قيم عددية غير محدودة أو لا نهائية بين الحد الأدنى والحد الأعلى في مجال تغيره، كالقيم الآتية: $X \in \Omega = [-\infty, +\infty]$ أو $X \in \Omega = [a, b]$.[1]

مثال(03.2): درجة حرارة تفاعل كيميائي معين، المسافة المقطوعة لجسم معين خلال وحدة الزمن، طول شخص...

2- التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منفصل Probability Distribution of Discret Random Variable

2-1- عرض التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منفصل

التوزيع الاحتمالي هو جدول يلخص مجال تعريف المتغير العشوائي X والاحتمالات التي ترافق كل قيمة X_i من قيم مجال التعريف Ω. إذا تسمى مجموعة كل القيم الممكنة لمتغير عشوائي واحتمالاتها بالتوزيع الاحتمالي[2]، وهو التكرار النسبي للقيم التي يأخذها المتغير. التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي يكون على شكل جدول مكون من سطرين يتضمن السطر الأول مجال التعريف ويتضمن السطر الثاني احتمالات القيم [3] ويجب أن يحقق الشرطين التاليين[4]:

$$\begin{cases} \Sigma P(X = x_i) = 1 \\ Pi \geq 0 \end{cases}$$

ويعرض جدول التوزيع الاحتمالي كما يلي:

$\mathbf{X_i}$	x_1	x_2	...	x_n	$\mathbf{\Sigma P(X = x_i)}$
$\mathbf{P(X = x_i)}$	p_1	p_2	...	p_n	**1**

مثال(04.2): نرمي قطعة نقدية ثلاث مرات متتالية ونُعرف المتغير العشوائي X كما يلي:

X: عدد الصور المتحصل عليها في التجربة.

[1] بشير عبد الكريم[2006]: مرجع سابق، ص، 105.

[2] Ibid., p. 251.

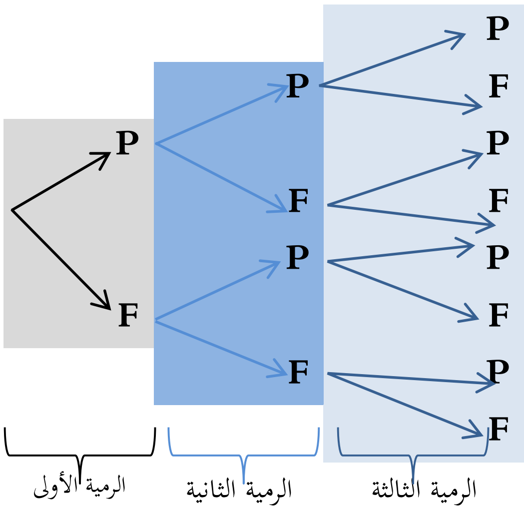
[3] المرجع نفسه.

[4] Jeremy Orloff and Jonathan Bloom [2014]:Introduction to Probability and Statistics, Discrete Random Variables, class 4, p.3, available on: https://math.mit.edu/~dav/05.dir/class4-prep.pdf (seen on: 02 /17/2021)

- ما هو نوع المتغير العشوائي **X** مع التعليل؟
- أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير عشوائي X وتأكد فعلا أنه توزيع احتمالي.

الحل:

- نوع المتغير العشوائي **X**: هو متغير عشوائي منفصل لأنه يمثل عدد الصور وهو غير قابل للتجزئة.
- التوزيع الاحتمالي لـ**X**: يضم عنصرين مجال التعريف وحساب الاحتمالات.
- نرمز للصورة بـ **F**
- ونرمز لكتابة بـP



$$E = \{(P,P,P),\ (P,P,F),\ (P,F,P),\ (P,F,F),\ (F,P,P),\ (F,P,F),\ (F,F,P),\ (F,F,F)\}$$

$x = 0 \quad x = 1 \quad x = 1 \quad x = 2 \quad x = 1 \quad x = 2 \quad x = 2 \quad x = 3$

$\text{Card} = |E| = 8$

- ➢ **مجال تعريف** X:

$X \in \Omega = [0, 1, 2{,}3]$

- ➢ **حساب احتمالات القيم:**

$$P(X = 0) = P\big((P,P,P)\big) = \frac{1}{8}$$
$$P(X = 1) = P[(P,P,F),(P,F,P),(F,P,P)] = \frac{3}{8}$$
$$P(X = 2) = P[(P,F,F),(F,P,F),(F,F,P)] = \frac{3}{8}$$
$$P(X = 1) = P\big((F,F,F)\big) = \frac{1}{8}$$

- إذا يمكن تلخيص التوزيع الاحتمالي للمتغير كما يلي:

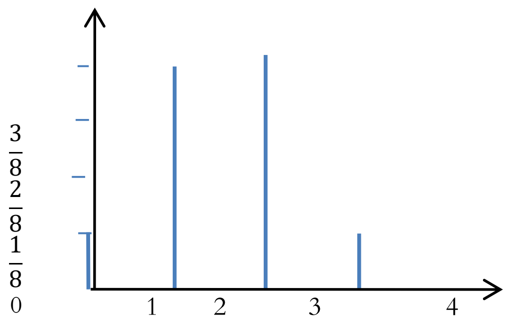
$\mathbf{X}$	0	1	2	3	$\mathbf{\Sigma P(X = x_i)}$
$\mathbf{P(X = x_i)}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	**1**

إذا التوزيع هو فعلا توزيع احتمالي.

2-2- التمثيل البياني للتوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منفصل:

يتم تمثيل التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منفصل بواسطة أعمدة بيانية، وذلك عن طريق الاحداثيات: (xi, pi)

- مثل بيانيا التوزيع الاحتمالي للمثال رقم(04.2)
- التمثيل البياني للتوزيع الاحتمالي يكون كالتالي:



3-2- دالة توزيع الاحتمالية لمتغير عشوائي منفصل Probability Mass Function for Random variable

هي دالة عددية موجبة متزايدة نطاقها مجموعة الأعداد الحقيقة (R) ومداها المجال[1 – 0]، وتسمى أيضا" الدالة التجميعية أو التراكمية" نرمز لها بـ F(x) وتعرف كما يلي[1]:

$$F(X) = P(X \leq x) = \sum_{x=x_1}^{x=x_n} P(X = x_i)$$

ويتم حساب قيم $F(x)$ بالصيغة التالية:

[1]Hwei P. Hsu [1997]: Theory and Problems of Probability, Random Variables, and Random Processes, Schaum's Outline of Probability and Statistics, Mc Graw –Hill, New Jersey, p.35.

$$F(X)=\begin{cases}0 & x<x_1\\ P_1 & x_1\le x<x_2\\ P_1+P_2 & x_2\le x<x_3\\ \vdots & \vdots\\ P_1+P_2+\cdots+P_{n-1} & x_{n-1}\le x<x_n\\ 1 & x\ge x_n\end{cases}$$

- **خصاص دالة التوزيع الاحتمالية للمتغير العشوائي المنفصل:**

يمكن تلخيص أهم خصائص دالة التوزيع الاحتمالية لمتغير عشوائي منفصل كما يلي[1]:

- دالة عددية موجبة متزايدة (دالة غير متناقصة) $F(X)\geq 0$ وهي دالة تراكمية .
- تكون دالة التوزيع الاحتمالية محصورة دائما بين الصفر والواحد أي: $0\leq F(X)\leq 1$.
- عندما يؤول X إلى $-\infty$ فإن دالة التوزيع الاحتمالية تساوي الصفر أي: $\lim_{x\to-\infty}F(X)=0$.
- عندما يؤول X إلى $+\infty$ فإن دالة التوزيع الاحتمالية تساوي الواحد أي: $\lim_{x\to+\infty}F(X)=1$.[2]
- دالة التوزيع الكثافة الاحتمالية، دالة سُلمية تحتوي على قفزات ولا تمثل منحنى متصل.[3]

- أحسب دالة التوزيع الاحتمالية للمثال رقم (04.2)

لدينا:

$$F(X)=P(X\leq x_i)=\sum_{i=1}^{n}P(X=x_i)$$
$$F(0)=P(X\leq 0)=\frac{1}{8}$$
$$F(1)=P(X\leq 1)=P(X=0)+P(X=1)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{4}{8}$$
$$F(2)=P(X\leq 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{4}{8}+\frac{3}{8}=\frac{7}{8}$$
$$F(3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=\frac{7}{8}+\frac{1}{8}=1$$

إذن

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=0\leftrightarrow P(X<x_1)=P(X<0)=0$$
$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=1\leftrightarrow F(X>x_n)=F(X>3)=1$$

فمثلا:

$$F(4)=P(X\leq 4)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$$

---

[1] أنظر كلا من :

- Jeremy Orloff and Jonathan Bloom [2014]:Op.Cit., p.5.
- Hwei P. Hsu [1997]: Op. Cit., p.39

[2] Jeremy Orloff and Jonathan Bloom [2014]:Introduction to Probability and Statistics, Continuous Random Variables,class 5, p.7, available on: https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-05-introduction-to-probability-and-statistics-spring-2014/readings/MIT18_05S14_Reading5b.pdf (seen on:19/02/2021)

[3] لحسن عبد الله باشيوة[2014]: مرجع سابق، ص 131.

$$= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} + 0 = 1$$

$$F(5) = P(X \leq 5) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} + 0 + 0 = 1$$

$$F(x > x_n) = 1$$

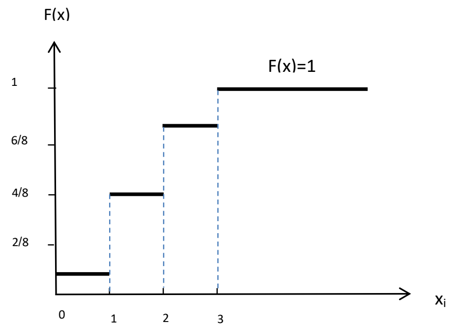
ويمكن حساب $F(x)$ مباشرة على الجدول كما يلي:

Xi	0	1	2	3	$\sum Pi$
Pi	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1
F(x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{7}{8}$	1	-

2-4- التمثيل البياني لدالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$ لمتغير عشوائي منفصل:

يتم تمثيل دالة التوزيع الاحتمالية بيانيا بواسطة منحنى سُلمي متصاعد متقطع بواسطة الاحداثيات $(x_i, F(x))$.

- مثل بيانيا دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$ للمثال رقم(04.2):



2-5- حساب الاحتمالات: يتم حساب الاحتمالات عن طريق استنتاجها من جدول التوزيع الاحتمالي وأيضا باستخدام دالة التوزيع الاحتمالية$F(x)$ والتي يتمثل دورها الأساسي في حساب الاحتمالات:

$$P(x \leq a) = F(a)$$
$$P(x < a) = P(X \leq a - 1) = F(a - 1)$$
$$P(x > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$$
$$P(x \geq a) = 1 - P(x < a) = 1 - P(x \leq a - 1)$$
$$= 1 - F(a - 1)$$
$$P(a < x < b) = P(x < b) - P(x \leq a)$$
$$= P(x \leq b - 1) - P(x \leq a)$$
$$F(b - 1) - F(a)$$
$$P(a \leq x \leq b) = P(x \leq b) - P(x < a)$$
$$= P(x \leq b) - P(x \leq a - 1)$$
$$= F(b) - F(a - 1)$$
$$P(a \leq x < b) = P(x < b) - P(x < a) = P(x \leq b - 1) - P(x \leq a - 1)$$
$$= F(b - 1) - F(a - 1)$$
$$P(a < x \leq b) = P(x \leq b) - P(x \leq a) = F(b) - F(a)$$

- أحسب الاحتمالات التالية للمثال رقم (04.2):

$$P(x \le 1) = F(x \le 0) + P(x = 1) = F(1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$$
$$P(x < 2) = P(x \le 1) = F(1) = \frac{4}{8}$$
$$P(x \ge 1) = P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

أو

$$P(x \ge 1) = 1 - P(x < 1) = 1 - P(x \le 0) = 1 - F(0) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$
$$P(x > 2) = 1 - P(x \le 2) = 1 - F(2) = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$$

أو

$$P(x > 2) = P(x = 3) = \frac{1}{8}$$
$$P(0 < x \le 3) = P(x \le 3) - P(x \le 0) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

3- التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متصل

3-1- دالة الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي متصل

إذا كان المتغير العشوائي المنفصل يعرف عن طريق التوزيع الاحتمالي فإن المتغير العشوائي المتصل يعرف عن طريق دالة كثافة احتمالية أو دالة الاحتمال، وهي مجموعة القيم التي يمكن أن تأخذها المتغيرة العشوائية المستمرة والاحتمالات الملحقة بها، حيث يرمز لكثافة الاحتمال عند كل قيمة x_i الممكن أن يأخذها المتغير العشوائي المتصل بالرمز $f(x)$ وهي ممثلة بمنحنى متصل تأخذ الصيغة الرياضية التالية:

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & X \in [a-b] \\ 0 & X \notin [a-b] \end{cases}$$

و يجب أن تحقق $f(x)$ الشرطين: [1]

$$\begin{cases} f(x) \ge 0 \\ \int_\Omega f(x)\,dx = 1 \end{cases}$$

[1]F.M. Dekking et al [2005]: Op.Cit.,p.57.

تأخذ دالة الكثافة الاحتمالية عدة صيغ رياضية قد تكون دالة خطية ثابتة ($f(x) = a$)، أو تمر من المبدأ ($f(x) = ax$) ، أو خطية لا تمر من المبدأ ($f(x) = ax + b$)، أو قطع مكافئ ($f(x) = ax^2 + bx + c$) ...إلخ.

مثال(04.2): لتكن دالة الكثافة الاحتمالية التالية لمتغير عشوائيX:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x & X \in [0-4] \\ 0 & X \notin [0-4] \end{cases}$$

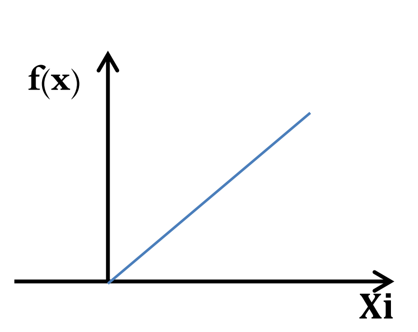
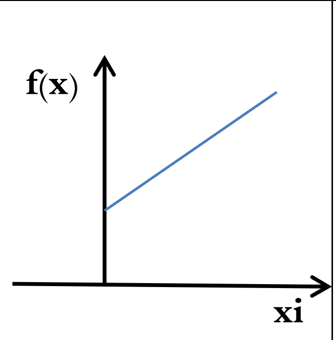
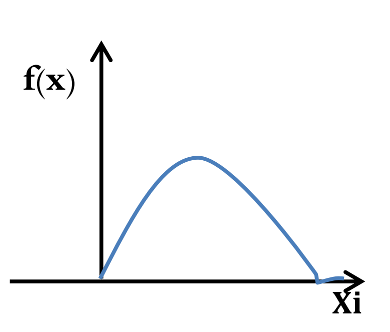
- تأكد أن $f(x)$ دالة كثافة احتمالية:
- $f(x)$ دالة كثافة احتمالية إذا $\leftrightarrow$: $\int_0^4 f(x)dx = 1$

$$\int_0^4 f(x)dx = \int_0^4 \left(\frac{1}{8}x\right) dx = \left[\frac{x^2}{16}\right]_0^4 = F(4) - F(0) = \frac{4^2}{16} - \frac{0^2}{16} = 1 - 0 = 1$$

- إذن نستنتج أن $f(x)$ هي فعلا دالة كثافة احتمالية.

2-3- التمثيل البياني لدالة الكثافة لمتغير عشوائي متصل:

يتم تمثيل بيانيا التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتصل بواسطة منحنى تكراري الذي يشمل قيم مجال تعريف ذلك المتغير Ω لدالة الكثافة الاحتمالية، وذلك عن طريق الاحداثيات $(x_i, f(x))$ ويتحدد الشكل حسب الصيغة الرياضية كما يلي:[1]

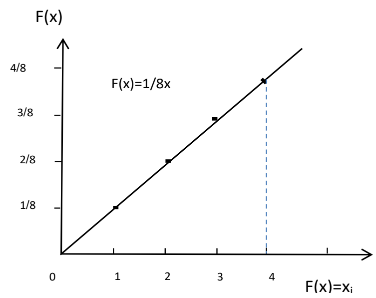
إذا كان: $f(x) = ax$ فيكون تمثيلها كما يلي:	إذا كان: $f(x) = ax + b$ فيكون تمثيلها كما يلي:	إذا كان: $f(x) = ax^2 + bx + C$ فيكون تمثيلها كما يلي:
		

- مثل بيانيا دالة الكثافة الاحتمالية للمثال رقم (04.2)

ويتم تمثيلها عن طريق الإحداثيات $(x_i\ fx)$ كالتالي:

[1] Jeremy Orloff and Jonathan Bloom [2014]:Introduction to Probability and Statistics, Continuous Random Variables, class 5, Op. Cit., p.6.

$$f(0,(0)=0)\left(1,f(1)=\frac{1}{8}\right)\left(2,f(2)=\frac{2}{8}\right)\left(3,f(3)=\frac{3}{8}\right)\left(4,f(4)=\frac{4}{8}\right)$$



3-3- دالة توزيع الاحتمالية لمتغير عشوائي Probability Density Function

هي دالة عددية نرمز لها بـ F(x) وتعطينا احتمال أن يكون المتغير العشوائي أصغر أو يساوي قيمة معينة (احتمال مجال جزئي) من مجال تعريفه Ω،إذن فهي معرفة كالتالي[1]:

$$F(X)=P(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx$$

- **خصاص دالة التوزيع الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل:**

يمكن تلخيص أهم خصائص دالة التوزيع الاحتمالية لمتغير عشوائي متصل كما يلي[2]:

- دالة عددية موجبة متزايدة (دالة غير متناقصة) $F(X)\geq 0$ وهي دالة تراكمية.
- تكون دالة التوزيع الاحتمالية محصورة دائما بين الصفر والواحد أي: $0\leq F(X)\leq 1$.
- عندما يؤول X إلى $-\infty$ فإن دالة التوزيع الاحتمالية تساوي الصفر أي: $\lim_{x\to-\infty}F(X)=0$.
- عندما يؤول X إلى $+\infty$ فإن دالة التوزيع الاحتمالية تساوي الواحد أي: $\lim_{x\to+\infty}F(X)=1$.[3]
- بما أن $F(X)$هي عبارة عن دالة التوزيع الاحتمالية لمتغير عشوائي متصل و$f(x)$ هي عبارة عن دالة الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي متصل، فيمكن حساب كل واحدة منهما بدلالة أخرى إما بالاشتقاق أو بتكامل الدالة الأصلية أي:

$$\begin{Bmatrix} F(X)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x}f(x)dx \\ f(x)=\acute{F}(X)' \end{Bmatrix}$$

[1] D J Wilkinson [SA]: Op. Cit., p. 54.
[2] Ibid., p. 56.
[3] Jeremy Orloff and Jonathan Bloom [2014]:Introduction to Probability and Statistics, Continuous Random Variables, class 5, Op. Cit., p.7.

- دالة التوزيع الاحتمالية لمتغير عشوائي متصل $F(x)$ لها أهمية كبيرة لأنها تهتم بحساب التكامل أي هي تساعد على حساب احتمالات المتغير العشوائي X لأي مجال جزئي محصور بين النقطتين a وb أي[1] :

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = F(b) - F(a)$$

- كما يمكن حساب الاحتمالات الأخرى حسب الصيغة التالية:

$$P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = F(b) - F(a)$$

- إذا كان X يساوي قيم ثابتة أي: $X = a$ فإن احتمالها يساوي الصفر أي:

$$P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0$$

- كما يمكن حساب الاحتمال $P(X < a)$ أيضا من خلال الصيغة التالية:

$$P(X < a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = F(a)$$

- في حين يمكن حساب الاحتمالين $P(X > a)$ و $P(X \geq a)$ أيضا من خلال الصيغة التالية:

$$P(X \geq a) = P(X > a) = \int_a^{+\infty} f(x)dx = 1 - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = 1 - F(a)$$

- أحسب دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$ للمثال (04.2)

$$F(x) = P(x \leq xi) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

$$f(x) = \begin{Bmatrix} 0 & x < 0 \\ f\frac{1}{8}\ x & x \in [0-4] \\ 0 & X > 4 \end{Bmatrix}$$

- $X < 0$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x<0} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x<0} 0\ dx = 0$$

- $X \in [0-4]$

$$F(x) = P(x \leq x_i) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{x\in[0-4]} \frac{1}{8}\ x\ dx = 0 + \left[\frac{x^2}{16}\right]_0^{x\in[0-4]}$$

$$= F(x) - F(0) = \frac{0^2}{16} - \frac{x^2}{16} = \frac{x^2}{16}$$

[1] Hwei P. Hsu [1997]: Op. Cit., p.42.

- $X > 4$

$F(x) = P(x \leq xi) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{4}\left(\frac{1}{8}x\right) dx + \int_{4}^{x>4} 0dx = 0 + \left[\frac{x^2}{16}\right]_0^4 + 0 =$

$F(4) - F(0) = \frac{4^2}{16} - 0 = \frac{16}{16} = 1$

إذن يمكن تلخيص دالة التوزيع الاحتمالية كما يلي:

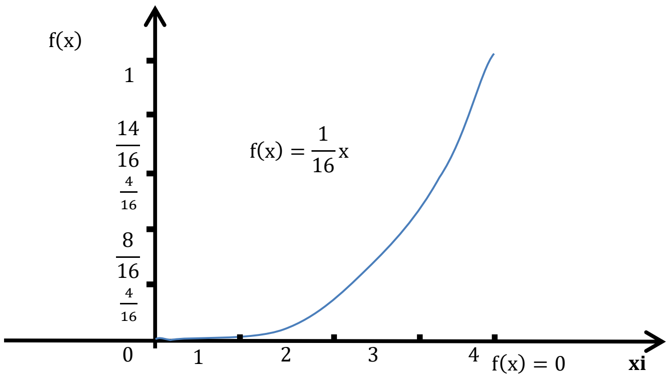
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{16}x^2 & x \in [0-4] \\ 1 & x > 4 \end{cases}$$

3-4- التمثيل البياني لدالة توزيع الاحتمالية $F(x)$ لمتغير عشوائي متصل:

يتم تمثيل البياني لدالة التوزيع الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل بواسطة منحنى تكراري الذي يشمل قيم مجال تعريف ذلك المتغير Ω لدالة الكثافة الاحتمالية، عن طريق الاحداثيات$(x_i, F(x))$.[1]

- مثل بيانيا دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$ للمثال رقم (04.2):

$$(0, F(0) = 0), \left(1, F(1) = \frac{1}{16}\right)\left(2, F(2) = \frac{4}{16}\right)\left(3, F(3) = \frac{9}{16}\right)(4, F(4) = 1)$$



3-5- حساب الاحتمالات:

يتم حساب الاحتمالات عن طريق تكامل دالة الكثافة الاحتمالية، أي باستخدام دالة التوزيع الاحتمالية.

أحسب الاحتمالات التالية للمثال رقم (04.2): $P(x \leq 2)$، $P(x < 1)$، $P(x > 1)$، $P(1.5 < x < 3)$

$$P(x \leq 2) = \int_0^2 \frac{1}{8}xdx = F(2) - F(0) = \frac{2^2}{16} - \frac{0^2}{16} = \frac{4}{16}$$

[1] عبد الهادي الرفاعي [دون سنة]: مرجع سابق، ص، 4.

$$P(x<1)=1-P(x\leq 1)=1-\int_0^1 \frac{1}{8}xdx=1-[F(2)-F(0)]\quad =1-F(1)+F(0)$$

$$=1-\frac{1^2}{16}+\frac{0^2}{16}=1-\frac{1}{16}$$

أو

$$P(x>1)=\int_1^4 \frac{1}{8}xdx=F(4)-F(1)=\frac{4^2}{16}-\frac{1^2}{16}=\frac{16}{16}-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$$

$$P(1.5<x<3)=\int_{1.5}^3 \frac{1}{8}xdx=F(3)-F(1.5)=\frac{3^2}{16}-\frac{(1.5)^2}{16}=0.56=0.14=0.42$$

4- معالم المتغير العشوائي:

إن للمتغيرات العشوائية نفس المعالم أو المميزات العددية للمتغير الإحصائي في الإحصاء الوصفي والتي من أهمها مقاييس النزعة المركزية المتمثلة في المتوسطات ومقاييس التشتت، سيتم التطرق إلى أهم المعالم المتمثلة في التوقع والتباين والانحراف المعياري، وقبل ذلك يجب الاشارة إلى مفهوم العزوم.

4-1- العزوم: [1]

تنقسم إلى عزوم البسيطة ، والعزوم المركزية.

4-1-1- العزوم البسيطة : وهي العزوم حول نقطة الأصل (حول الصفر) وتسمى أيضا العزوم الأولية أو الابتدائية، وهي عبارة عن التوقع الرياضيX قوة k تحسب وفق الصيغة الرياضية التالية:

$$m_k=E\left(X^k\right)$$

- **في حالة المتغير العشوائي المنفصل**: تكون حسب الصيغة التالية[2]:

$$m_k=E\left(X^k\right)=\sum_{i=1}^{n} x_i^k \,.\, P_i$$

✓ العزم البسيط من الدرجة الأولى لمتغير عشوائي منفصل يساوي الأمل الرياضي، أي:

$$.m_1=E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \,.\, P_i$$

✓ العزم البسيط من الدرجة الثانية لمتغير عشوائي منفصل يساوي:

[1] جدو سامية[2020]: مطبوعة في الإحصاء 2، محاضرات وتمارين، جامعة سطيف 2، ص 54.

[2] Hwei P. Hsu [1997]: Op. Cit., p.42.

$m_2 = E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \, . P_i$

ملاحظة هامة: يمكن التعبير على التباين والانحراف المعياري لمتغير عشوائي منفصل بدلالة العزوم (m_1وm_2)، كالتالي:

لدينا: $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

أي: $V(X) = m_2 - m_1^2$

وبالتالي: $\sigma(X) = \sqrt{m_2 - m_1^2}$

- **في حالة المتغير العشوائي المتصل**: تكون حسب الصيغة التالية[1]:

$$m_k = E(X^k) = \int_{\Omega} x^2 \, . f(x) \, dx$$

- العزم البسيط من الدرجة الأولى لمتغير عشوائي متصل يساوي التوقع الرياضي، أي:

$$m_1 = E(X^1) = \int_{\Omega} x \, . f(x) \, dx$$

- العزم البسيط من الدرجة الثانية لمتغير عشوائي متصل يساوي: $m_2 = E(X^2) = \int_{\Omega} x^2 . f(x) \, dx$
- يمكن التعبير على التباين والانحراف المعياري لمتغير عشوائي منفصل بدلالة العزوم (m_1وm_2)، كالتالي:

لدينا: $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = m_2 - m_1^2$

وبالتالي: $\sigma(X) = \sqrt{m_2 - m_1^2}$

4-1-2- العزوم المركزية

العزوم المركزية يتم حسابها حول التوقع الرياضي، فالعزم المركزي من الدرجة k للمتغير العشوائي X هو التوقع الرياضي للانحرافات قيم هذا المتغير عن توقعها الرياضي قوة K ويعطى بالصيغة التالية :

$$M_k = E[x - E(X)]^k$$

[1] Idem.

- **في حالة المتغير العشوائي المنفصل**: وتكون حسب الصيغة التالية:

$$M_k = E[x - E(X)]^k = \sum P_i . E[x - E(X)]^k$$

- **في حالة المتغير العشوائي المتصل**: وتكون حسب الصيغة التالية:

$$M_k = E[x - E(X)]^k = \int_{\Omega} \left([x - E(X)]^k\right)^k . f(x)\, dx$$

ملاحظة هامة: يمكن التعبير على التباين والانحراف المعياري لمتغير عشوائي متصل بدلالة العزوم (m_1وm_2) ،فهذه الطريقة هي أسهل بكثير من الصيغة الأصلية، لدينا: $V(X)= E(X^2) - E(X)^2$، أي:

$$V(X) = m_2 - m_1^2$$

$$\sigma(X) = \sqrt{m_2 - m_1^2}$$

2-4- التوقع الرياضي (الأمل الرياضي):

التوقع الرياضي أو ما يصطلح عليه بالأمل الرياضي هو عبارة عن المتوسط الحسابي للقيم الممكنة للمتغير العشوائي مرجحة بالاحتمالات المقابلة لهذه القيم[1]، ويمثل القيمة التي تتمركز حولها قيم المتغير العشوائي، ولذلك سمي بالقيمة المتوسطة ويرمز له رياضيا بـ E(x).

4–2–1– التوقع الرياضي لمتغير عشوائي منفصل

في حالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المفصل يحسب التوقع الرياضي بالعلاقة التالية[2] :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i . P_i = x_1 . P_1 + x_2 . P_2 + \cdots + x_n . P_n$$

أما بلغة العزوم فالتوقع الرياضي هو عبارة عن العزم البسيط من الدرجة الأولى m_1 كما يلي[3]:

$$m_k = E\left(x^k\right) = \sum pixi^k$$

$$m_1 = E(x^1) = \sum pixi^1$$

$$m_1 = E(X)$$

[1] Neil A et Weiss [2017]:Op. Cit., p.255.
[2] Idem.

[3] عبد الهادي الرفاعي[دون سنة]: مرجع سابق، ص 9.

- **بعض خواص التوقع الرياضي**[1]:

✓ التوقع الرياضي لعدد ثابت a هو العدد الثابت نفسه $E(a) = a$.

✓ التوقع الرياضي للتوقع الرياضي يساوي التوقع الرياضي نفس، لأنه لا يمثل قيمة عشوائية وإنما قيمة ثابتة $E(E(X)) = E(X)$

✓ إذا كان x متغير عشوائي وa عدد ثابت فإن: $E(aX) = a \times E(X)$

✓ إذا كان لدينا X وY متغيران عشوائيان فإن التوقع الرياضي لمجموعهما يساوي: $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

✓ إذا كان لدينا X وY متغيران عشوائيان فإن الفرق بينهما يساوي: $E(X - Y) = E(X) - E(Y)$

✓ إذا كان لدينا X وY متغيران عشوائيان مستقلان فإن التوقع الرياضي لجدائهما: $E(X \times Y) = E(X) + E(Y)$

- أحسب التوقع للمتغير العشوائي x للمثال رقم (04.2):

إذا كان Z متغير عشوائي حيث: $Z = 2X - 1$، أحسب $E(Z)$

الحل:

$\mathbf{x_i}$	0	1	2	3	Σ
$\mathbf{P_i}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1
$\mathbf{P_i\ x_i}$	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{12}{8} = 1,5$

$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i . P_i = x_1 . P_1 + x_2 . P_2 + \cdots + x_n . P_n = \left(\frac{1}{8} \times 0\right) + \left(\frac{3}{8} \times 1\right) + \left(\frac{3}{8} \times 2\right) + \left(\frac{1}{8} \times 3\right) = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1,5 \cong 2$ صورة

الشرح: يقدر متوسط عدد الصور في هذه التجربة بـ2.

- **حساب $E(Z)$:**

$$E(Z) = (2X - 1) = E(2X) - E(1) = 2E(X) - 1 = 2(1,5) - 1 = 3 - 1 = 2$$

4-2-2- التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المتصل:

[1] جدو سامية[2020]: مرجع سابق، ص 83.

على أساس أن المتغير العشوائي المتصل يعرف بدالة كثافة احتمالية[1] $f(x)$ ، فإن التوقع الرياضي يحسب بالعلاقة التالية[2] :

$$E(X) = \int_{\Omega} x.f(x)\,dx$$

ملاحظة: يشترك كل من المتغير العشوائي المنفصل والمتصل في نفس خواص الأمل الرياضي[3].

مثال: أحسب التوقع الرياضي للمثال رقم(04.2):

الحل:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x & X \in [0-4] \\ 0 & X \notin [0-4] \end{cases}$$

$$E(X) = m_1 = \int_{\Omega} x.f(x)\,dx = \int_0^4 x\left(\frac{1}{8}x\right)dx = \int_0^4 \frac{1}{8}x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3\times 8}\right] = \left[\frac{x^3}{24}\right]_0^4 = F(4) - F(0)$$
$$= \frac{4^3}{24} - \frac{0^3}{24} = 2{,}67$$

4-3- التباين والانحراف المعياري

يقيس الانحراف المعياري مدى تباعد قيم المتغير العشوائي عن المتوسط الحسابي (التوقع الرياضي) ويعكس مدى تشتت الظاهرة أو مدى تجانسها[4]، فكلما كان قيمة الانحراف صغيرة كان التشتت ضعيف والظاهرة أكثر تجانس والعكس صحيح، والانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين $V(x)$ ويرمز له رياضيا بـ$\sigma(X)$.

4-3-1- التباين والانحراف المعياري لمتغير عشوائي منفصل

- **التباين$V(X)$** : يحسب التباين في حالة المتغير العشوائي المنفصل بالعلاقة التالية:

$$V(X) = E\left[\left(x - E(x)\right)\right]^2 = \sum_{i=1}^{n} P_i.(x_i - E(X))^2 = E(x^2) - (E(x))^2$$

---

[1] D J Wilkinson[SA]:Op,Cit.,p.57.

[2] Hwei P. Hsu [1997]: Op. Cit., p.42.

[3] Jeremy Orloff and Jonathan Bloom [2017]:More About Continuous Random Variables, class 5, p.13, available on: https://math.mit.edu/~dav/05.dir/class5.5-prep.pdf (seen on:05/02/2021)

[4] Neil A et Weiss [2017]:Op., Cit. p.257.

وبلغة العزوم فالتباين هو:

$$V(X) = E(x^2) - \left(E(x)\right)^2 = m_2 - m_1^2$$

- العزم البسيط من الدرجة k : $m_k = E(x^k) = \sum pixi^k$
- العزم البسيط من الدرجة الأولى: $m_1 = E(x^1) = \sum pixi^1$
- العزم البسيط من الدرجة الثانية m_2: $m_2 = E(X^2) = \sum pixi^2$
- **الانحراف المعياري $\sigma(X)$**: هو عبارة عن الجذر التربيعي للتباين:

$$\sigma(X) = \sqrt{m_2 - m_1^2} = \sqrt{V(X)}$$

- **بعض خصائص التباين:** [1]

✓ تباين العدد الثابت a يساوي الصفر: $V(a) = 0$

✓ إذا كان X متغير عشوائي و a عدد ثابت فإن: $V(aX) = a^2 \times V(X)$

✓ إذا كان لدينا X وY متغيران عشوائيان فإن التباين لمجموعهما يساوي: $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

✓ إذا كان لدينا X وY متغيران عشوائيان فإن الفرق بينهما يساوي: $V(X-Y) = V(X) + V(Y)$

✓ إذا كان لديناX متغير عشوائي وa وb عددان ثابتان فإن: $V(aX \pm b) = a^2 . V(X)$

- أحسب التباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X للمثال رقم (04.2):

-5 إذا كان Z متغير عشوائي حيث: $Z = 2X - 1$، أحسب $V(Z)$

الحل:

X_i	0	1	2	3	Σ
P_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1
$P_i x_i$	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{12}{8} = 1,5$
$P_i Xi^2$	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{12}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{24}{8} = 3$
$(x_i - E(x))^2$	2.25	0.25	0.25	2.25	5
$P_i (x_i - E(x))^2$	0,28	0.094	0.094	0.28	$0,748 \cong 0.75$

[1] جدو سامية[2020]: مرجع سابق، ص 86.

- حساب التباين والانحراف المعياري: يمكن حسابه بطريقتين:

الطريقة الأولى:

$$\sigma(x) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{(m_2 - m_1^2)}$$

$$m_1 = E(X^2) = \sum P_i\, x_i = 1.5$$

$$m_2 = E(x^2) = \sum P_i\, x_i{}^2 = \left(\frac{1}{8} \times 0^2\right) + \left(\frac{3}{8} \times 1^2\right) + \left(\frac{3}{8} \times 2^2\right) + \left(\frac{1}{8} \times 2^2\right)$$

$$m_2 = 3$$

$$V(x) = m_2 - m_1^2 = 3 - (1,5)^2 = 0,75$$

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{(m_2 - m_1^2))}$$

$$\sigma(x) = \sqrt{3 - (1.5)^2} = \sqrt{0.75} \cong 0.87$$

- **الطريقة الثانية:**

$$\sigma\,(x) = \sqrt{V(x)}$$

$$V(x) = E[(x_i - E(x))]^2 = \sum P_i \cdot (x_i - E(x))^2$$

ومن خلال الجدول أعلاه :

$$V(x) = \sum P_i = (x_i - E(x))^2 = 0.75$$

$$\sigma(x) = \sqrt{0.75} = 0.87$$

- حساب $V(Z)$:

$$Z = 2X - 1$$

$$V\,(Z) = V(2X - 1) = 2^2 V(x) + V(1) = 2^2 \times (0,75) + 0 = 4 \times (0,75) = 3$$

ملاحظة: يشترك كل من المتغير العشوائي المنفصل والمتصل في نفس خواص التباين.

4-3-2- التباين والانحراف المعياري لمتغير عشوائي متصل :

- **التباين $V(X)$** : يحسب التباين في حالة المتغير العشوائي المتصل بالعلاقة التالية:

$$V(X) = \int_\Omega \big(X - E(X)\big)^2 . f(x)dx = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = m_2 - m_1^2$$

– **الانحراف المعياري $\sigma(X)$**: هو عبارة عن الجذر التربيعي للتباين:

$$\sigma(X) = \sqrt{m_2 - m_1^2} = \sqrt{V(X)}$$

ملاحظة: [1] يشترك كل من المتغير العشوائي المنفصل والمتصل في نفس خصائص التباين.

مثال: أحسب التباين والانحراف المعياري $\sigma(X)$ للمثال رقم(04.2):

لدينا:

$$E(X) = m_1 = 2,67$$

$$m_2 = E(x^2) = \int_0^4 x^2 f(x)dx = \int_0^4 x^2\left(\frac{1}{8}x\right)dx = \int_0^4 \left(\frac{1}{8}x^3\right)dx = \left[\frac{x^4}{32}\right]_0^4 = F(4) - F(0)$$
$$= \frac{4^4}{32} - \frac{0^4}{32} = \frac{256}{32} - 0 = 8$$

$$\sigma(x) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{m_2 - m_1^2} = \sqrt{8-(2,67)^2} = \sqrt{8-7,13} = \sqrt{0,87} = 0,93$$

ويمكن تلخيص أهم الفروقات بين المتغير العشوائي المنفصل والمتغير العشوائي المتصل في الشكل التالي:

[1] Jeremy Orloff and Jonathan Bloom [2017]:Op,Cit.,p.13.

المتغيرات العشوائية

المتغير العشوائي المتصل	المتغير العشوائي المنفصل

1 مجال التعريف

المتغير العشوائي المنفصل: $X \in r_x = [1,2,\dots n]$

المتغير العشوائي المتصل: $X \in r_x = [a - b]$

2

التوزيع الاحتمالي:

Xi	x_1	x_1	…	…	x_n	$\sum x_I$
$P(X = xi)$	P_1	P_2	…	…	P_n	1

$0 \le F(x) \le 1 \quad \sum_{i=1}^{n} Pi = 1$

دالة الكثافة الاحتمالية:

$f(x) = ax \,/\, f(x) = ax + b$

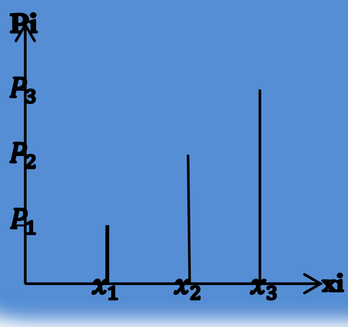
$f(x) = ax^2 + bx + b$

$\int_{\Omega}^{\square} F(x)dx = 1$

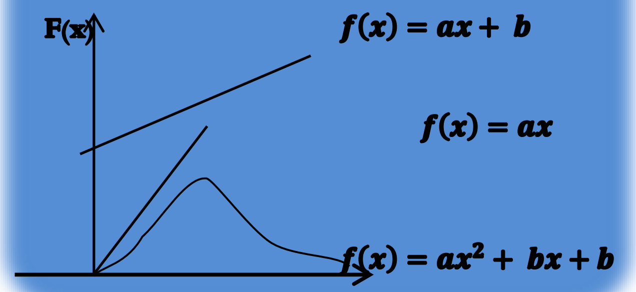
$\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

3

التمثيل البياني للتوزيع الاحتمالي:



التمثيل البياني للتوزيع الاحتمالي:



4 دالة التوزيع الاحتمالية f(x)

$f(xi) = P(X \le xi) = \sum Pi$

تشتركان نفس خصائص f(x):

دالة موجبة تراكمية متزايدة

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \leftrightarrow P(x < x_1)$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 \leftrightarrow F(x > x_n)$

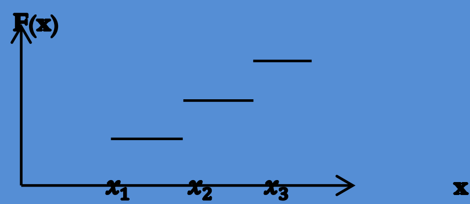
ملاحظة: في المتغير العشوائي المتصل:

$f(x) = \int_{\Omega}^{\square} F(x)dx$

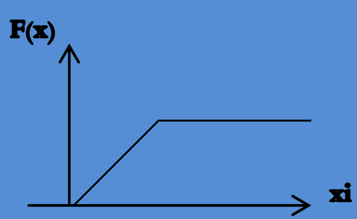
$f(x) = F(x)$

5 التمثيل البياني لF(x)

التمثيل البياني لـ F(x) :



التمثيل البياني لـ F(x) :



المميزات العددية

المتغير العشوائي المنفصل

المتغير العشوائي المتصل

1

التوقع الرياضي $m_1 = E(X)$

$E(X) = m_1 = \sum_{i=1}^{n} Pi\,xi$

$E(X) = m_1 = \int_{\Omega} F(x)dx$

العزم من الدرجة m_k:k

$m_k = E(X^k) = \sum Pixi^k$

$m_1 = E(X^1) = \sum Pixi$

$m_2 = E(X^2) = \sum Pixi^2$

العزم من الدرجة m_k:k

$m_k = E(X^k) = \int_{\Omega} x^k F(x)dx$

$m_1 = E(X^1) = \int_{\Omega} xF(x)dx = E(X)$

$m_2 = E(X^2) = \int_{\Omega} x^2 F(x)dx = E(X^2)$

2

الانحراف المعياري $\delta(X)$ والتباين $V(x)$

$\delta(X) = \sqrt{V(x)}$

$\delta(X) = E(X^2) - E(x)^2$

$\delta(X) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{E(X^2) - E(x)^2}$

$\delta(X) = V(x)$

$\delta(X) = E(X^2) - E(x)^2$

$\delta(X) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{E(X^2) - E(x)^2}$

3

خصائص التوقع الرياضي والتباين

يشتركان في نفس الخصائص

التوقع الرياضي

$E(a) = a$ (a عدد ثابت)

$E(ax) = a\,E(X)$

$E(E(x)) = E(X)$

$E(ax+b) = a\,E(X) + b$

$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

$E(X-Y) = E(X) - E(Y)$

$E(Xx \times Y) = E(X) \times E(Y)$

التباين

$V(a) = 0$ (a عدد ثابت)

$V(ax) = a^2\,V(X) = V(ax+b)$

$V(ax) + V(b) = a^2\,V(X)$

$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

$V(X-Y) = V(X) + V(Y)$

تمارين محلولة

التمرين الأول:

لاعب يرمي قطعة نرد مرة واحدة، وذلك ضمن الشروط التالية: إذا كان الرقم الناتج 1 يحصل على 20 وحدة نقدية، وإذا كان الرقم الناتج 6 يخسر 20 وحدة نقدية، أما فيما عدا ذلك فإنه يحصل على عشر وحدات نقدية، وليكن:

- X متغير عشوائي يمثل المبلغ المحصل عليه.
- عين التوزيع الاحتمالي لكلا المتغيرين، ثم تأكد من أنهما فعلا توزيعين احتماليين؟

الحل:

: المبلغ المحصل عليهX

$X \in [-20,10,20]$

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \rightarrow |\Omega| = 6$

$P(X = -20) = P(6) = \frac{1}{6}$

$P(X = 10) = P(2,3;4,5) = \frac{4}{6}$

$P(X = 20) = P(1) = \frac{1}{6}$

Y: مجموع المبلغ المحصل عليه

$Y \in [-20,10,20]$

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \rightarrow |\Omega| = 6$

$P(Y = -20) = P(6) = \frac{1}{6}$

$P(Y = 10) = P(2,3;4,5) = \frac{4}{6}$

$$P(Y = 20) = P(1) = \frac{1}{6}$$

X	-2	1	2	$\sum P(X = x_i)$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

- بما أن الشرطين: $P(X = x_i) \geq 0$ و $\sum P(X = x_i) = 1$ محققين فإن: هذا التوزيع هو فعلا توزيع احتمالي.

التمرين الثاني:

- ليكن التوزيع الاحتمالي التالي لمتغير عشوائي X منفصل:

X	-2	1	2	4
$P(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

1. تأكد من أن هذا التوزيع احتمالي.
2. مثل بيانيا هذا التوزيع.
3. أحسب دالة التوزيع الاحتمالية (الدالة التجميعية) $F(x)$ ثم مثلها بيانيا.
4. أحسب: $E(x)$، m_2، $V(x)$، $\sigma(x)$
5. أحسب الاحتمالات التالية: $P(X > 1)$ $P(-2 \leq X < 4)$ $P(X = 3)$ $P(X \geq 1)$

الحل:

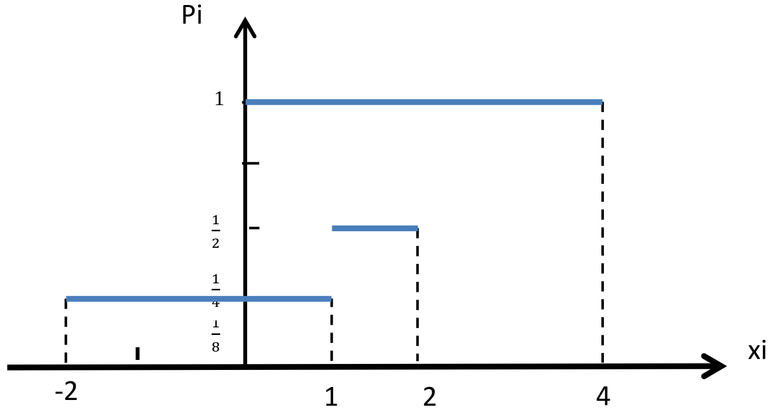
X	-2	1	2	4	$\sum Pi$
$P(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	1

أ– هذا التوزيع هو توزيع احتمالي لأن:

$$\sum Pi = 1$$

ب– التمثيل البياني لهذا التوزيع:

أ- حساب الدالة) دالة التوزيع الاحتمالية التجميعية($F(x)$:



Xi	-2	1	2	4	$\sum$
$P(x = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	1
$F(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{8}$	1	/
$P_i x_i$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{8}$
$x_i{}^2$	4	1	4	16	/
$P_i x_i{}^2$	1	$\frac{1}{8}$	2	2	$\frac{41}{8}$

$F(x) = P(X \leq xi)$

$$F(X < -2) = P(X < -2) = 0$$

$$F(-2) = P(X \leq -2) = \frac{1}{4}$$

$$F(1) = P(x \leq 1) = P(X = -2) + P(X = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

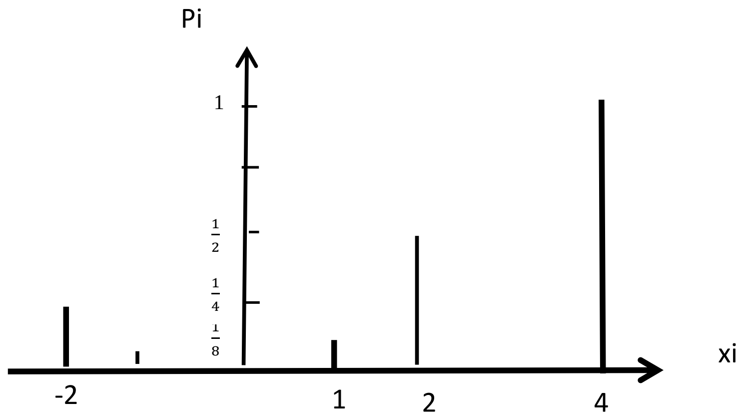
$$F(2) = P(x \leq 2) = P(X = -2) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$$

$$F(4) = P(x \leq 4) = P(X = -2) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(x = 4) = \frac{7}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

$$F(5) = P(x \leq 5) = P(X = -2) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(x = 4) + P(X = 5)$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + 0 = 1$$

- التمثيل البياني لدالة التوزيع الاحتمالية:

- حساب $\sigma(X)$ ، $V(X)$ ، $E(X)$ ، m_2:



$m_1 = E(X) = \sum_{i=1}^{k} P(X = x_i).xi = \frac{9}{8}$

$m_2 = E(X^2) = \sum_{i=1}^{k} P(X = x_i).x_i^2 = \frac{41}{8}$

$V(X) = m_2 - m_1^2 = \frac{41}{8} - \left(\frac{9}{8}\right)^2 = \frac{41}{8} - \frac{81}{64} = \frac{328-81}{64} = \frac{247}{64}$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{247}{64}} = \frac{\sqrt{247}}{8} \approx 1{,}97$

- حساب الاحتمالات:

$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - [P(X = -2) + P(X = 1)] = 1 - \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right] = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}$
$= \frac{8 - 2 - 1}{8} = \frac{5}{8}$

$P(X \leq 1) = P(X = 2) + P(X = 1) = F(X = 1) = \frac{3}{8}$

$P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 4) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{6}{8}$

$P(X = 3) = 0$

$P(-2 \leq X < 4) = P(X = -2) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{2 + 1 + 4}{8}$
$= \frac{7}{8}$

$P(-2 \leq X \leq 4) = P(X \leq 4) - P(X < -2) = F(4) - F(X < -2) = \frac{7}{8} - 0 = \frac{7}{8}$

التمرين الثالث:

ليكن التوزيع الاحتمالي التالي لمتغير عشوائي X:

Xi	−1	0	1	2	3	4	$\sum P(X = xi)$

Pi	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	a	a	$\frac{1}{10}$	/

1- أوجد قيمة الثابت a؟

2- علما أن $a = \frac{3}{10}$، أحسب الأمل الرياضي والانحراف المعياري؟

3- أحسب الاحتمالات التالية: $P(0 < X < 4)$، $P(X > 4)$، $P(X > 0)$

4- ليكن Z متغير عشوائي حيث: $Z = 5x - 2$

- أحسب $E(Z)$ ، $V(Z)$.

الحل :

1- إيجاد قيمة الثابت a:

بما أن التوزيع السابق هو توزيع احتمالي فإن: $\sum Pi = 1$.

$$\sum Pi = 1 \leftrightarrow \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + a + a + \frac{1}{10} = 1 \leftrightarrow \frac{4}{10} + 2a = 1 \leftrightarrow a = \frac{3}{10}$$

2- علما أن $a = \frac{3}{10}$ ، حساب الأمل الرياضي والانحراف المعياري:

- حساب الأمل الرياضي:

$$E(x) = \sum Pi\ xi = \left(-1.\frac{1}{10}\right) + \cdots + \left(4.\frac{1}{10}\right) = \frac{19}{10} = 1{,}9 = m_1$$

- حساب الانحراف المعياري:

$$\sigma(x) = \sqrt{m_2 - m_1}$$

$$m_2 = E(X^2) = \sum_{i=1}^{k} P(X = x_i).x_i^2 = \frac{57}{10} = 5{,}7$$

$$\sigma(x) = \sqrt{m_2 - m_1} = \sqrt{5{,}7 - (1,9)^2} = \sqrt{2{,}09} = 1{,}45$$

Xi	-1	0	1	2	3	4	$\sum P(X = xi)$
Pi	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	1
Pixi	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{19}{10}$

$Pixi^2$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{12}{10}$	$\frac{27}{10}$	$\frac{16}{10}$	$\frac{57}{10}$

3- حساب الاحتمالات التالية:

$$P(0 < X < 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{7}{10} = 0{,}7$$

$$P(X > 4) = 0$$

$$P(X > 0) = 1 - P(X \leq 0) = 1 - \big(P(X = -1) + P(X = 0)\big) = 1 - \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right) = \frac{8}{10}$$

4- حساب $E(Z)$:

$$E5(Z) = E(5X - 2) = E(5X) - E(2) = 5E(X) - 2 = 5 \times 1{,}9 - 2 = 7{,}5$$

5- حساب $V(Z)$:

$$V(Z) = V(5X - 2) = V(5X) - V(2) = 5^2V(X) + 0 = 25 \times V(X) = 25 \times (2{,}09) = 52{,}25$$

التمرين الرابع:

نرمي زهرتي نرد متماثلتين متجانستين ومتوازنتين مرة واحدة وبصفة عشوائية.

أ– نعرّف على هذه التجربة العشوائية متغير عشوائي X: أكبر النتيجتين اللتين تظهرهما الزهرتان أي:

$X = Max(a, b)$ باعتبارa هي نتيجة الزهرة الأولى وb هي نتيجة الزهرة الثانية.

1- حدد طبيعة X ومجال تعريفه.

2- أحسب التوزيع الاحتمالي لX وتأكد أنه فعلا توزيع احتمالي.

3- مثل بيانيا هذا التوزيع.

4- أحسب الأمل الرياضي والانحراف المعياري.

5- أحسب الاحتمالات: $P(X < 3)$ $P(X \leq 3)$ $P(X = 1)$ $P(1 \leq X \leq 4)$

ب– نعرف على نفس التجربة العشوائية، المتغير العشوائي Y: مجموع النتيجتين اللتين تظهرهما الزهرتان أي:

$Y = \sum(a.b)$

1-1- أجب على نفس الأسئلة: 2،3،4، المتعلقة بالمتغير العشوائي Y.

2-1- أحسب دالة التوزيع الاحتمالية ل:Y.

3-1- أحسب الاحتمالات التالية: $P(Y>3)$ $P(Y\leq 4)$، $P(Y<4)$، $P(Y=1)$، $P(Y=4)$
باستعمال التوزيع الاحتمالي Pi ودالة التوزيع الاحتمالية $F(y_1)$.

الحل:

أ- التجربة الأولى:

1- تحديد طبيعة X ، نوعه ومجال تعريفه:

- **طبيعة المتغير X** :هو متغير عشوائي لأنه لا يمكن التنبؤ بالنتائج مسبقا كما أن لعناصر التجربة نفس الحظوظ في الظهور.
- **نوع المتغير X** : متغير عشوائي منفصل لأنه يمثل مجموع الرقمين الظاهرين وهو غير قابل للتجزئة.
- **مجال تعريف X**:

زهرتي النرد متجانستين (لا يوجد بها عيوب) ومتمايزين (واحدة حمراء وأخرى بيضاء)، كلا الزهرتين تحمل ستة أوجه: 1،2،3،4،5،6 .

- جزء من الكل (نهتم بوجه من بين ستة لكل زهرة)
- الترتيب مهم
- يوجد تكرار

$\Bigg\}$ ترتيبة بتكرار

$A_n^X = n^2 = 6^2 = 36$ ثنائية

مجموعة الأساس E:

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

X : أكبر النتيجتين $X = M(a,b)$

إذا مجال تعريف X هو كالآتي:

$X \in [1,2,3,4,5,6]$

2- حساب التوزيع الاحتمالي لـX :

- مجال تعريف X هو كالآتي:

$$X \in [1,2,3,4,5,6]$$

- حساب الاحتمالات:

A: النتيجة الكبرى التي تظهرها الزهرتان هي1.

$$P(X=1)=P(A)=\frac{|A|}{|E|}$$

$$A=\{(1,1)\} \quad |A|=1 \rightarrow P(A)=\frac{1}{36}$$

B: النتيجة الكبرى التي تظهرها الزهرتان هي 2.

$$P(X=2)=P(B)=\frac{|B|}{|E|}$$

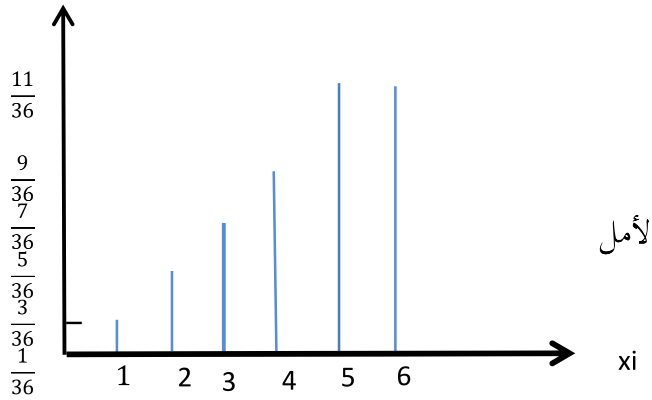
$$B=\{(1,2),(2,1),(2,2)\} \rightarrow |B|=3 \rightarrow P(X=2)=\frac{3}{36}$$

$$P(X=3)=\frac{5}{36}, P(X=4)=\frac{7}{36}, P(X=5)=\frac{9}{36} \quad , P(X=6)=\frac{11}{36}$$

Xi	1	2	3	4	5	6	
$P(X=xi)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1
$P(X=xi).xi$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{28}{36}$	$\frac{45}{36}$	$\frac{66}{36}$	$\frac{161}{36}$
$P(X=xi).xi^2$	$\frac{1}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{45}{36}$	$\frac{112}{36}$	$\frac{225}{36}$	$\frac{396}{36}$	$\frac{791}{36}$

3- التمثيل البياني :

4- حساب الأمل الرياضي والانحراف المعياري:



$E(X) = \sum Pi\ xi = \frac{161}{36} = 4{,}47$

$V(X) = m_2 - m_1^2$

$m_2 = E(X^2) = \sum Pi\ x_1^2 = \frac{791}{36} = 21{,}97$

$V(X) = \frac{791}{36} - \left(\frac{161}{36}\right)^2 = 1{,}99$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1{,}99} = 1{,}41$

5- حساب الاحتمالات:

$P(1 < X < 4) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{3}{36} + \frac{5}{36} = \frac{8}{36}$

$P(X = 1) = \frac{1}{36}$

$P(X < 3) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{36} + \frac{3}{36} = \frac{4}{36}$

$P(2 < X \leq 4) = P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{4}{36} + \frac{5}{36} = \frac{9}{36}$

$$P(1 \leq X \leq 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} + \frac{7}{36} = \frac{16}{36}$$

ب– التجربة الثانية

Y: مجموع النتيجتين اللتين تظهرهما الزهرتان أي:

$Y = \sum(a, b)$

1– التوزيع الاحتمالي لـ Y :

$Y \in [2,3,4 \ldots 12]$

مجموعة الأساس E:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Y:مجموع النتيجتين

$$Y = \sum (a, b)$$

إذا مجال تعريف Y هو كالآتي:

$$X \in [2,3 \dots 12]$$

- حساب الاحتمالات:

A: مجموع النتيجتين التي تظهرهما الزهرتين هو 2.

$$P(Y = 2) = P(A) = \frac{|A|}{|E|}$$

$$A = \{(1,1)\} \quad |A| = 1 \rightarrow P(A) = \frac{1}{36}$$

B: مجموع النتيجتين التي تظهرهما الزهرتين هو 3.

$$P(Y = 3) = P(B) = \frac{|B|}{|E|}$$

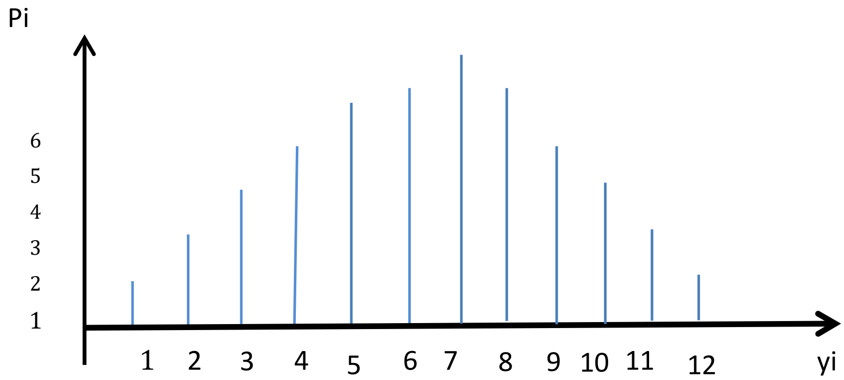
$$B = \{(1,2), (2,1)\} \rightarrow |B| = 3 \rightarrow P(Y = 3) = \frac{2}{36}$$

$$P(Y = 4) = \frac{3}{36}, P(Y = 5) = \frac{4}{36}, P(Y = 6) = \frac{5}{36} \ , P(Y = 7) = \frac{6}{36}, (Y = 8) = \frac{5}{36}, P(Y = 9) = \frac{4}{36}, P(Y = 10) = \frac{3}{36} \ , P(Y = 11) = \frac{2}{36}, P(Y = 12) = \frac{1}{36}$$

حساب التوزيع الاحتمالي لـY:

Yi	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
P(Y = yi)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1
Pi. yi	$\frac{2}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{20}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{42}{36}$	$\frac{40}{36}$	$\frac{36}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{22}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{252}{36}$
$\mathbf{Pi.y_i^2}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{48}{36}$	$\frac{100}{36}$	$\frac{180}{36}$	$\frac{294}{36}$	$\frac{320}{36}$	$\frac{324}{36}$	$\frac{300}{36}$	$\frac{242}{36}$	$\frac{144}{36}$	$\frac{1974}{36}$
F(y)	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	1	/

- التمثيل البياني:



6- حساب الأمل الرياضي والانحراف المعياري:

$$E(Y) = \sum Pi\, yi = \frac{252}{36} = 7$$

$$V(Y) = m_2 - m_1^2$$

$$m_2 = E(Y^2) = \sum Pi\, Y_i^2 = \frac{1974}{36} = 54{,}83$$

$$V(Y) = \frac{1974}{36} - \left(\frac{252}{36}\right)^2 = 5{,}83$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{5{,}83} = 2{,}41$$

7- حساب الاحتمالات:

$$P(Y = 4) = \frac{3}{36}$$

$$P(Y = 1) = 0$$

$$P(Y < 4) = P(X = 2) + P(X = 3) = P(X \le 3) = F(3) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{3}{36}$$

$$P(Y \le 4) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = F(4) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{6}{36}$$

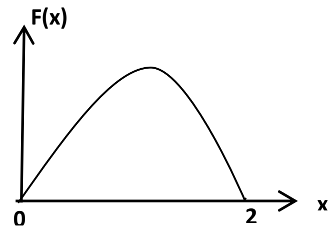
$$P(Y > 3) = 1 - P(X \le 3) = 1 - F(3) = 1 - \frac{3}{36} = \frac{33}{36}$$

التمرين الخامس:

التمثيل البياني يبين شكل دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$ لمتغير عشوائي متصل X (على شكل قطع مكافئ).

1- أوجد الصيغة الرياضية لدالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$.

2- إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية المعرفة بالصيغة: $f(x) = -3/4x^2 + 3/2x$



ب- تأكد فعلا من أنها دالة كثافة احتمالية؟

ت- أحسب دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$.

ث- أحسب: $F(0)$ $F(1)$ (2)، هل هذه القيم منطقية؟ وضح ذلك.

ج- أحسب الأمل الرياضي والانحراف المعياري.

ح- أحسب الاحتمالات التالية ومثلها بيانيا: $P(x < 1)$، $P(x > 1.5)$ $P(0.5 < x < 2)$

الحل:

1- إيجاد الصيغة الرياضية للدالة $f(x)$:

- نلاحظ من الشكل أن مجال تعريف X هو:

$$X \in \Omega = [0 - 2]$$

- لدينا صيغة الدالة العامة هي:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(2) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a.0 + b.0 + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases}$$

- ومن جهة أخرى نعلم أن الدالة $f(x)$ هي دالة كثافة احتمالية إذن:

$$\int_0^2 f(x)dx = 1 \rightarrow \int_0^2 (ax^2 + bx + c)dx = 1 \rightarrow \left[a.\frac{x^3}{3} + b.\frac{x^2}{2} + cx\right]_0^2 = 1$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{8}{3}a + 2b + 2c = 1 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{8}{3}a + 2b = 1$$

- ومنه يصبح لدينا:

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ \frac{8}{3}a + 2b = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -2a \\ \frac{8}{3}a + 2(-2a) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -2a \\ \frac{8a - 12a}{3} = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} b = -2a \\ \frac{-4}{3}a = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -2\left(\frac{-3}{4}\right) \\ a = \frac{-3}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = \frac{+3}{2} \\ a = \frac{-3}{4} \end{cases}$$

- ومنه نجد الصيغة التالية:

$$f(x) = \frac{-3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x$$

2-1- التأكد من أن $f(x)$ دالة احتمالية:

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 \left(\frac{-3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x\right)dx = \left[\frac{-3}{4}.\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}.\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \left[\frac{-3x^3}{12} + \frac{3x^2}{4}\right]_0^2 = F(2) - F(0)$$
$$= (-2 + 3) - 0 = 1]$$

إذن الدالة $f(x)$ هي دالة كثافة احتمالية.

2-2- حساب دالة التوزيع الاحتمالية $F(X)$:

يمكن عرض مجال تعريف دالة الكثافة الاحتمالية $f(X)$ ما يلي:

$$f(X) = \begin{cases} 0 & X \in]-\infty, 0[\\ -\frac{3}{4}X^2 + \frac{3}{2}X & X \in [0,2] \\ 0 & X \in]2, +\infty[\end{cases}$$

بما أن لدالة الكثافة الاحتمالية ثلاث مجالات، إذا سيتم حساب دالة التوزيع الاحتمالية على ثلاث مجالات:

$$F(X) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx$$

- $X < 0$:

$$\mathbf{F(X)} = \int_{-\infty}^{x<0} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x<0} (0)dx = 0$$

- $X \in [0,2]$

$$\mathbf{F(X)} = \int_{-\infty}^{x,x\in[0,2]} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0}(0)dx + \int_{0}^{x\in[0,2]} \left(\frac{-3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x\right)dx \ = 0 + \left[\frac{-3x^3}{12} + \frac{3x^2}{4}\right]_0^x$$
$$= 0 + (F(X) - F(0)) = 0 + \frac{-3x^3}{12} + \frac{3x^2}{4} + 0 = \frac{-3x^3}{12} + \frac{3x^2}{4}$$

- $X > 2$

$$\mathbf{F(X)} = \int_{-\infty}^{X>2} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0}(0)dx + \int_{0}^{2}\left(\frac{-3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x\right)dx + \int_{2}^{X>2}(0)dx = 0$$
$$+ \left[\frac{-3x^3}{12} + \frac{3x^2}{4}\right]_0^2 + 0 = 0 + (F(2) - F(0)) + 0 = 0 + (-2+3) + 0$$
$$= 1$$

- إذا يمكن تلخيص دالة التوزيع الاحتمالية كما يلي:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X \in]-\infty, 0[\\ -\frac{1}{4}X^3 + \frac{3}{4}X^2 & X \in [0,2] \\ 1 & X \in]2, +\infty[\end{cases}$$

أ- حساب : $F(0)$، $F(1)$، $F(2)$:

$$F(0) = -\frac{1}{4}(0)^3 + \frac{3}{4}(0) = 0$$

$$F(1) = -\frac{1}{4}(1) + \frac{3}{4}(1) = \frac{-1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}]$$

$$F(2) = -\frac{1}{4}(2)^3 + \frac{3}{4}(2)^2 = \frac{-8}{4} + \frac{12}{4} = -2 + 3 = 1]$$

- هذه القيم منطقية لأن الدالة $F(x)$ هي دالة تجميعية تصاعدية.

2-3- حساب الأمل الرياضي والانحراف المعياري:

$$E(X) = \int_0^2 X \times f(x)dx = \int_0^2 X\left(\frac{-3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x\right)dx = \int_0^2 \left(\frac{-3}{4} \times X^3 + \frac{3}{2} \times X^2\right)dx$$

$$E(X) = \left[\frac{-3}{4} \times \frac{X^4}{4} + \frac{3}{2} \times \frac{X^3}{3}\right]_0^2 = \left[\frac{-3X^4}{16} + \frac{3X^3}{6}\right]_0^2 = F(2) - F(0)$$

$$= \left(\frac{-3 \times 2^4}{16} + \frac{3 \times 2^3}{6}\right) = -3 + 4 = 1$$

$E(X) = 1 = m_1$

$V(X) = m_2 - m_1^2$

$$m_2 = \int_0^2 X^2 f(x)dx = \int_0^2 X^2.\left(\frac{-3}{4}.X^2 + \frac{3}{2}.X\right)dx = \int_0^2 \left(\frac{-3}{4}.X^4 + \frac{3}{2}.X^3\right)dx$$

$$= F(2) - F(0) = \left(\frac{-3 \times 2^5}{20} + \frac{3 \times 2^4}{8}\right) - 0 = \left(\frac{-96}{20} + 6\right) = \frac{24}{20} = 1{,}2$$

$V(X) = m_2 - m_1^2 = 1{,}2 - 1^2 = 0{,}2$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0{,}2} = 0{,}45$

-4-2 حساب الاحتمالات:

$$P(0{,}5 < X < 2) = \int_{0,5}^{2} f(x)dx = \int_{0,5}^{2} \left(\frac{-3}{4}X^2 + \frac{3}{2}X\right)dx = \left[-\frac{1}{4}X^3 + \frac{3}{4}X^2\right]_{0,5}^{2}$$

$$= F(2) - F(0{,}5) = \left[-\frac{1}{4}2^3 + \frac{3}{4}2^2\right] - \left[-\frac{1}{4}0{,}5^3 + \frac{3}{4}0{,}5^2\right]$$

$$= [-2 + 3] - [-0{,}03 + 0{,}19]$$

$$= 1 + 0{,}03 - 0{,}19 = 0{,}84 = 84\%$$

- 84% من المساحة الاجمالية تكون محصورة ما بين 05 و2.

$$P(X > 1{,}5) = \int_{1,5}^{2} f(x)dx = \int_{1,5}^{2} \left(\frac{-3}{4}X^2 + \frac{3}{2}.X\right)dx = \left[-\frac{1}{4}X^3 + \frac{3}{4}X^2\right]_{1,5}^{2} = F(2) - F(1{,}5)$$

$$= \left[-\frac{1}{4}2^3 + \frac{3}{4}2^2\right] - \left[-\frac{1}{4}1{,}5^3 + \frac{3}{4}1{,}5^2\right] = [-2 + 3] - [-0{,}85 + 1{,}7]$$

$$= 1 - 0{,}85 = 0{,}15$$

$$P(X < 1) = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{-3}{4}X^2 + \frac{3}{2}X\right)dx = \left[-\frac{1}{4}X^3 + \frac{3}{4}X^2\right]_0^1 = F(1) - F(0)$$

$$= \left[-\frac{1}{4}1^3 + \frac{3}{4}1^2\right] - \left[-\frac{1}{4}0^3 + \frac{3}{4}0^2\right]\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 0 = \frac{1}{2}$$

التمرين السادس:

لنفرض أن X متغير عشوائي يمثل الإنتاج السنوي من الشاحنات في أحد المؤسسات، أقصى طاقة إنتاجية هي 120 شاحنة.

- دالة الكثافة الاحتمالية معرفة كالتالي: $f(\mathrm{x}) = \mathrm{X}/2700$

ليكنY هو تكلفة انتاج شاحنة واحد بحيث: $\mathrm{Y} = -\mathrm{X}^2/31 + 4\mathrm{X} + 113$ (وحدة نقدية).

1- ما هو نوع هذا المتغير العشوائي ظاهريا (حسب نص المسألة) وموضوعيا. لماذا أعتبر كذلك؟

2- علل لماذا X المعرف أعلاه هو متغير عشوائي؟ حدد مجال تعريفه، تأكد من أن $f(x)$ هي فعلا دالة كثافة احتمالية، ما هي طبيعة Y علل ذلك.

3- أحسب متوسط الانتاج السنوي والشهري لهذه المؤسسة.

4- مثل بيانيا الدالة Y(افترض بعض القيم لرسم Y). ماذا نستنتج عن العلاقة بين مستوى الانتاج X والتكلفة الفرديةY ؟ ماذا تمثل القيمة 113 في صيغة الدالة Y؟

5- بين أن TC هو التكلفة الاجمالية السنوية لانتاج الشاحنات في هذه المؤسسة.

أ- ماهي صيغة TC وطبيعته؟

ب- أحسب متوسط التكلفة الاجمالية لإنتاج الشاحنات.

6- ما هو احتمال أن يبلغ إنتاج هذه المؤسسة: ما بين 90 و100 شاحنة في هذه السنة؟ أقل من 20 شاحنة؟ أكثر من 100 شاحنة؟ اشرح النتائج.

7- ما هو احتمال أن تكون التكلفة الفردية للشاحنة أقل من 113 وحدة نقدية؟

الحل:

X: الإنتاج السنوي من الشاحنات في إحدى المؤسسات:

$$f(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{x}}{7200}\ ,\ \mathrm{Y} = -\frac{\mathrm{x}^2}{31} + 4\mathrm{x} + 113$$

1− نوع هذا المتغير العشوائي ظاهريا(حسب نص المسألة) هو :متغير عشوائي متصل(أعطى دالة الكثافة الاحتمالية). وموضوعيا هو متغير عشوائي منفصل لأن الأمر يتعلق بعدد الشاحنات المنتجة خلال السنة،

واعتبر ذلك :لأن عدد قيم مجال التعريف كبيرا جدا وعليه يستحيل أن نتعامل معها كقيم فردية بل كمجالات ما بين 80 و100، أكبر من 100.

2-

- طبيعة X: متغير عشوائي لأنه يمثل حجم الانتاج السنوي، وهذا الأخير مرتبط بعوامل عشوائية عديدة تحدد حجمه (الاضرابات، انقطاع الكهرباء، الغيابات...).
- **مجال تعريف X**:

$X \in [0,120]$

- التأكد من أن $f(x)$ هي فعلا دالة كثافة احتمالية:

$$\int_0^{120} f(x)dx = 1 \leftrightarrow \text{دالة كثافة احتمالية} f(x)$$

$$\int_0^{120} f(x)dx = 1 \leftrightarrow \int_0^{120} \left(\frac{x}{7200}\right) dx = \frac{1}{7200}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{120} = \left[\frac{x^2}{14400}\right]_0^{120} = F(120) - F(0)$$

$$= \left[\frac{120^2}{14400}\right] - \left[\frac{0^2}{14400}\right] = 1$$

- **طبيعة Y**: هو متغير عشوائي متصل لأنه تابع لـX: وهو بدوره متغير عشوائي متصل.

3- متوسط الانتاج السنوي والشهري:

$$E(X) = \int_0^{120} xf(x)dx = \int_0^{120} x\left(\frac{x}{7200}\right)dx = \int_0^{120} \left(\frac{x^2}{7200}\right)dx = \left[\frac{x^3}{7200 \times 3}\right]_0^{120} = \left[\frac{x^3}{21600}\right]_0^{120}$$

$$= F(120) - F(0) = \left[\frac{120^3}{21600}\right] - \left[\frac{0^3}{21600}\right] = \frac{1728000}{21600} = 80 \text{ شاحنة}$$

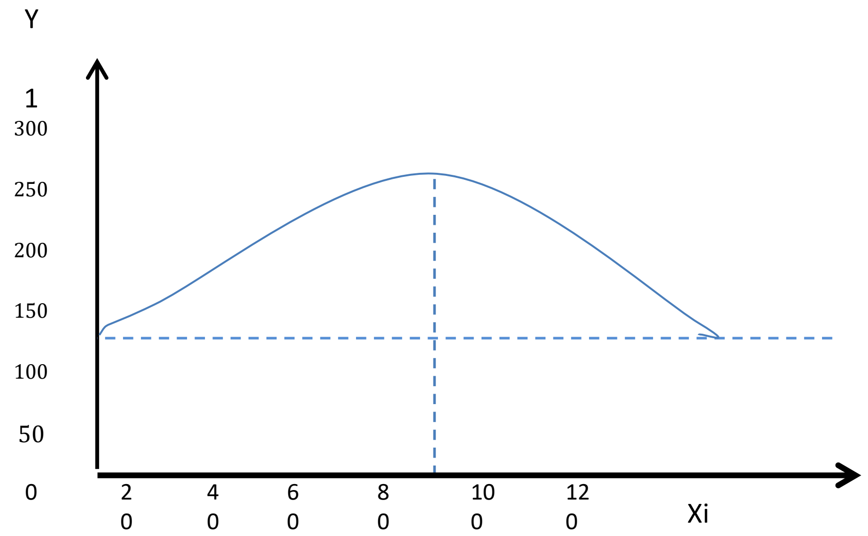
- **Z**: **الانتاج الشهري**:

$$E(Z) = \frac{E(x)}{12} = \frac{80}{12} = 6,66 \cong 7 \text{ شاحنة}$$

4- التمثيل البياني للدالة Y:

X	0	20	40	60	62	63	80	100	120
Y	113	180	221,3	236,8	237	236,97	226	190	128

- $\mathbf{X \in [0,62]}$: نجد التكلفة في تزايد مستمر كلما زاد الانتاج السنوي إلى غاية 62 شاحنة.
- $\mathbf{X \in]0,62]}$: تتناقص التكلفة الوحدوية كلما زاد عدد الشاحنات إلى غاية 120 جرار.(أي كلما زاد الانتاج انخفضت التكلفة).
- **113**: التكلفة الثابتة الوحدوية (تكاليف الكهرباء والغاز، الإيجار...).



5- صيغة CT:

X: الانتاج السنوي $\qquad Y = -\frac{x^2}{31} + 4x + 113$ (تكلفة انتاج شاحنة واحدة)

$$CT = X.Y = X\left(-\frac{X^2}{31} + 4X + 113\right) = -\frac{X^3}{31} + 4X^2 + 113X$$

- طبيعة **CT**: هو متغير عشوائي لأنه مرتبط بـ **X** وهو بدوره متغير عشوائي.
- **تصحيح CT:**

$$CT = CV + CF = 113.X = 113.120 = 13560 \rightarrow C.T_m = -\frac{X^3}{31} + 4X^2 + 13560$$

- طبيعة CT: هو متغير عشوائي لأنه مرتبط بمتغير عشوائي X.

ب– حساب متوسط التكلفة الإجمالية لإنتاج الجرارات: $E(C.T_m) \neq E(X.Y)$

$$E(TC) = E\left(-\frac{X^3}{31} + 4X^2 + 13560\right) = -\frac{1}{31}E(X^3) + 4E(X^2) + E(13560)$$

$$E(X^3) = \int_0^{120} X^3.f(x)dx = \int_0^{120} \left(X^3.\frac{X}{7200}\right)dx = \left[\frac{X^5}{5(7200)}\right]_0^{120}$$

$$E(X^3) = 691200$$

$$E(X^2) = \int_0^{120} X^2.f(x)dx = \int_0^{120} \left(X^2.\frac{X}{7200}\right)dx = \left[\frac{X^4}{4(7200)}\right]_0^{120}$$

$$E(X^2) = 7200$$

$$E(13560) = 13560$$

$$E(CT) = E\left(-\frac{X^3}{31} + 4X^2 + 13560\right) = -\frac{1}{31}E(X^3) + 4E(X^2) + E(13560)$$
$$= \left(-\frac{1}{31} \times 691200\right) + (4 \times 7200) + (13560)$$
$$= 22296{,}77 + 28800 + 13560 = 20063{,}22$$

6- احتمال أن يبلغ انتاج هذه المؤسسة:

$$P(90 < X < 100) = \int_{90}^{100} \left(\frac{X}{7200}\right) dx = \left[\frac{X^2}{2 \times 7200}\right]_{90}^{100} = F(100) - F(90) = \frac{100^2}{14400} - \frac{90^2}{14400} = 0{,}1320 = 13{,}20\%$$

- لو تتبعنا انتاج هذه المؤسسة لمئة سنة كاملة فإننا نتوقع أن تنتج خلال حوالي 13 سنة ما بين 90 و100 شاحنة. أو 13% من السنوات التي تنشط بها المؤسسة (في نفس الظروف) يكون انتاجها السنوي يتراوح ما بين 90 و 100 شاحنة.

$$P(X < 20) = \int_{0}^{20} \left(\frac{X}{7200}\right) dx = \left[\frac{X^2}{2 \times 7200}\right]_{0}^{20} = F(20) - F(0) = \frac{20^2}{14400} - \frac{0^2}{14400} = 0{,}027 = 2{,}7\%$$

- لو تتبعنا انتاج هذه المؤسسة لمئة سنة كاملة فإننا نتوقع أن تنتج خلال حوالي 3 سنوات أقل من20 شاحنة ، أو 3% من السنوات التي تنشط بها المؤسسة (في نفس الظروف) يكون انتاجها السنوي أقل من 20 شاحنة.

$$P(X > 100) = \int_{100}^{120} \left(\frac{X}{7200}\right) dx = \left[\frac{X^2}{2 \times 7200}\right]_{100}^{120} = F(120) - F(100) = \frac{120^2}{14400} - \frac{100^2}{14400} = 0{,}305 = 30\%$$

- لو تتبعنا انتاج هذه المؤسسة لمئة سنة كاملة فإننا نتوقع أن تنتج خلال 30 سنة أكثر من 100 شاحنة، أو30% من السنوات التي تنشط فيها المؤسسة (بنفس الظروف) يكون فيها انتاجها السنوي أكثر من 100 شاحنة.

7- احتمال أن تكون: $P(Y < 113) = P(X > 120) = 0$

- احصائيا غير ممكن لأننا نجهل دالة الكثافة الاحتمالية.

- محاسبيا: إذا بلغت المؤسسة أقصى طاقة انتاجية فالتكلفة الوحدوية هي 128 ولا يمكن أن تصبح 113.

التمرين السابع:

ليكن X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية $f(x)$ معرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & x \in [0-2[\\ 0 & x \ni [0-2[\end{cases}$$

1- ما هو نوع المتغير العشوائيX، مع التعليل.

2- مثل بيانيا دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$.

3- أوجد دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$، ومثلها بيانيا

4- أحسب التوقع الرياضي والانحراف المعياري لهذا التوزيع.

5- أحسب الاحتمالات التالية: $P(X > 1)$، $P(1 < X \leq 1,5)$، $F(0,8)$.

الحل:

1- نوع المتغير العشوائي X: هو متغير عشوائي مستمر، لأنه معرف بدالة كثافة احتمالية.

2- التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية :

3- دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$: بما أن دالة الكثافة الاحتمالية تأخذ ثلاث قيم فإن حساب دالة التوزيع الاحتمالية يتم على ثلاث قيم، يمكن عرض قيم دالة الكثافة الاحتمالية *f(x)* كما يلي:

$$f(X) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ \frac{1}{2}X & X \in [0,2] \\ 0 & X > 2 \end{cases}$$

لدينا: $F(X) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx$

- $X < 0$:

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} (0)\, dx = 0$$

- $X \in [0-2]$:

$$F(X) = \int_{-\infty}^{0} (0)\, dx + \int_{0}^{x \in [0-2]} \left(\frac{1}{2}x\right) dx = \left[\frac{1}{2} \times \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{x} = \left[\frac{x^2}{4}\right]_{0}^{x} =$$

$$(F(X) - F(0)) = \frac{X^2}{4}$$

- $X > 2$:

$$F(X) = \int_{-\infty}^{X>2} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} (0)dx + \int_{0}^{2} \left(\frac{1}{2}x\right) dx + \int_{2}^{X>2} (0)dx = 0 + \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^2 + 0 = 0 + (F(2) - F(0)) + 0 = 0 + 1 + 0 = 1$$

- إذا يمكن تلخيص دالة التوزيع الاحتمالية كما يلي:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ \frac{x^2}{4} & X \in [0,2] \\ 1 & X > 2 \end{cases}$$

- التمثيل البياني لدالة التوزيع الاحتمالية:

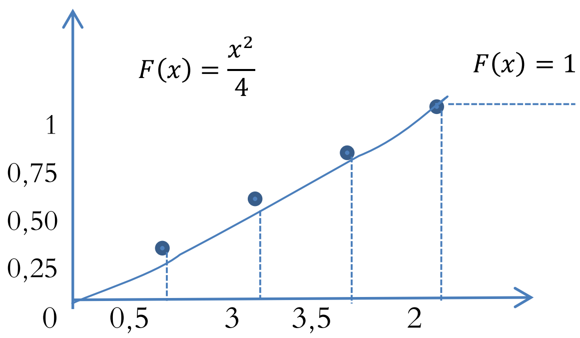
$X = 0 \rightarrow F(0) = 0$

$X = 0{,}5 \rightarrow F(0{,}5) = 0{,}0625$

$X = 1 \rightarrow F(1) = \frac{1}{4} = 0{,}25$

$X = 1{,}5 \rightarrow F(1{,}5) = 0{,}5625$

$X = 2 \rightarrow F(2) = 1$



3- حساب الأمل الرياضي والانحراف المعياري:

- حساب الأمل الرياضي:

$$E(X) = m_1 = \int_0^2 Xf(x)dx = \int_0^2 X\left(\frac{x}{2}\right)dx = \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2}\right)dx = \left[\frac{1}{2}\times\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2$$

$$= F(2) - F(0) = \frac{2^3}{6} - \frac{0^3}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$E(X) = \frac{3}{4} = m_1$$

$$V(X) = m_2 - m_1^2$$

$$m_2 = \int_0^2 X^2 f(x)dx = \int_0^2 X^2\left(\frac{x}{2}\right)dx = \int_0^2 \left(\frac{x^3}{2}\right)dx = \left[\frac{1}{2}\times\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \left[\frac{x^4}{8}\right]_0^2$$

$$= F(2) - F(0) = \frac{2^4}{8} - \frac{0^4}{8} = \frac{16}{8} = 2$$

$$V(X) = m_2 - m_1^2 = 2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 2 - 0{,}56 = 1{,}44$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1{,}44} = 1{,}2$$

4- حساب الاحتمالات : $P(X > 1)$، $P(1 < X \leq 1{,}5)$، $F(0{,}8)$.

$P(X > 1)$

$$P(1 < X < 1{,}5) = \int_1^{1{,}5} f(x)dx = \int_1^{1{,}5} \left(\frac{1}{2}X\right)dx = \left[\frac{X^2}{4}\right]_1^{1{,}5} = F(1{,}5) - F(1)$$

$$= \left[\frac{1{,}5^2}{4}\right] - \left[\frac{1^2}{4}\right] = 0{,}56 - 0{,}25 = 0{,}31$$

$$P(X > 1) = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{2}X\right)dx = \left[\frac{X^2}{4}\right]_1^2 = F(2) - F(1)$$

$$= \left[\frac{2^2}{4}\right] - \left[\frac{1^2}{4}\right] = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$$

$$F(0{,}8) = \frac{0{,}8^2}{4} = 0{,}16$$

التمرين الثامن:

X متغير عشوائي متصل معرف في المجال [0 – 8]، دالة الكثافة الاحتمالية هي: $f(x) = Kx(8-x)$ ،
أحسب قيمة K .

الحل

- حساب قيمة K، بما أن f(x) دالة كثافة احتمالية فإن:

$$\int_0^8 f(x)dx = 1 \rightarrow \int_0^8 \left(Kx(8-x)\right)dx = 1 \rightarrow= K\int_0^8 (8x - x^2)dx = 1 \rightarrow K.\left[8.\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]\begin{matrix}8\\0\end{matrix} = 1$$

$$\rightarrow F(8) - F(0) = 1 \rightarrow K\left[8.\frac{8^2}{2} - \frac{8^3}{3}\right] - K\left[8.\frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3}\right] = 1$$

$$\rightarrow K\left[8.\frac{64}{2} - \frac{512}{3}\right] - 0 = 1 \rightarrow K\left[\frac{512}{2} - \frac{512}{3}\right] = 1 \rightarrow K\ \left[\frac{1536 - 1024}{6}\right] = 1$$

$$\rightarrow K\left[\frac{512}{6}\right] = 1 \rightarrow \frac{512K}{6} = 1 \rightarrow K = \frac{3}{256}$$

الفصـل الثالث

قوانين التوزيعات الاحتمالية

1- التوزيعات الاحتمالية المنفصلة

2- التقريب بين القوانين الاحتمالية لمتغير عشوائي منفصل

3- التوزيعات الاحتمالية المتصلة

4- التقريب بين القوانين الاحتمالية لمتغير عشوائي منفصل والقانون الطبيعي

تمهيد:

لقد تعرضنا في الفصل السابق إلى المتغيرات العشوائية المنفصلة والمتصلة و وتوزيعاتها الاحتمالية، **التي** تعتبر دوال احتمالية لمتغيرات عشوائية متقطعة ومتصلة وكيفية حساب مميزتها العددية. وفي هذا الفصل سنتطرق إلى مجموعة من قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة المهمة الشهيرة بالنسبة للمتغير العشوائي المنقطع، وهم توزيع برنولي(Bernoulli) والتوزيع ذي الحدين(Binomial) وقانون بواسون(Poisson)..إلخ وبعض التوزيعات للمتغير العشوائي المتصل كالتوزيع الطبيعي والمعياري.

هذه التوزيعات تعطينا معلومات احتمالية ذات فائدة كبيرة وخاصة بالنسبة لصناع القرار، إلا أنه لا يمكن التطرق إلى جميعها وإنما فقط ذات التطبيقات العديدة في الحياة العملية. وكما هو الحال بالنسبة للمتغيرات العشوائية لنوعين فتصنف أيضا قوانينها إلى نوعين منفصلة ومتصلة.

1- التوزيعات الاحتمالية المنفصلة

ونقصد بها القوانين الاحتمالية التي يكون فيها المتغير العشوائي من النوع المنفصل.

1-1- تعريف توزيع برنولي Bernoulli Distribution[1]: $B(1, p)$

يسمى أيضا بـ Bernoulli trails يستخدم في التجربة من النوع البسيطِ جدا وهي واحدة من أبسط التجارب في التوزيعات الاحتمالية المنفصلة[2]، وتحتمل تجربة برنولي نتيجتان فقط إما النجاح أَو الفشلِ مثل ظهور الكتابة أَو الصورةِ في رمي قطعة نقود مرة واحدة، أَو الحصول على قطعة معيبة أَو غيرِ معيبة في تجربة سحب قطعة واحدة من انتاج اجمالي.[3]

يتبع المتغير العشوائي المنفصل X قانون برنولي، إذا كان يعبر عن تجربة عشوائية واحدة تحتوي على حادثين فقط، وهما متنافيان، فإذا افترضنا أن الحادث الأول هو A، فإن الحادث الثاني يكون $\bar{A}$ ، فإن ظهور الحادث A يمثل النجاح يأخذ المتغير العشوائي X القيمة واحد باحتمال p، أما عند عدم ظهور A أي وقوع $\bar{A}$ فيعتبر فشلا، ويأخذ المتغير العشوائي X القيمة صفر، باحتمال q حيث $q = 1 - P$.عموما فإن شروط تحقق قانون برنولي تكون كالتالي[4]:

- التجربة العشوائية تكرر مرة واحدة؛
- التجربة العشوائية لها نتيجتان فقط ومتنافيتان؛
- مجال تعريف المتغير العشوائيX لا يقبل إلا قيمتين هما: 0و1 والمرفقتين بالاحتمالين p وq على التوالي.

---

[1] Jakob Bernoulli (1654-1705)

[2] Pierre DUSART[201 3]: Cours de Probabilités , Saudi Electronic University , p.24 . https://www.unilim.fr/pages_perso/pierre.dusart/Probas/Cours_Proba_2013.pdf

[3] دروس جامعة الملك سعود [دون سنة]:مقدمة في الاحصاء، ص 47.متوفر على الرابط:
https://faculty.ksu.edu.sa/sites/default/files/lectures_of_100_stat.pdf (شوهد يوم: 2021/01/05)

[4] Delhoum Zohra Sabrina[2021]: Cours et exercices corrigés en probabilités, Ecole Supérieurs d’Economie Oran ,Algerie , p.24. https://ese-oran.dz/wp-content/uploads/2021/10/Cours-et-exercices-corriges-en.pdf

إذا كان المتغير العشوائي X يتبع قانون برنولي فيتم التعبير عنه بالصيغة التالية:

$\mathbf{X \backsim B(1,p)}$

حيث:

X: يمثل المتغير العشوائي في التجربة ومرتبط بالنتيجة التي يركز عليها صاحب التجربة.

B: يرمز إلى قانون برنولي.

1: يرمز إلى تكرار التجربة وهو مرة واحدة.

p: احتمال النجاح.

ملاحظة: العلاقة بين النجاح والفشل تكون كالآتي:

$$\mathbf{p + q = 1 \rightarrow q = 1 - p}$$

1-1-2- معالم قانون برنولي$\mathbf{X \backsim B(1,p)}$

يتضمن قانون برنولي معلمتين وهما 1 وp.

1: يرمز إلى تكرار التجربة وهو مرة واحدة.

p: احتمال النجاح.

1-1-3- التوزيع الاحتمالي لقانون برنولي:

يتضمن التوزيع الاحتمالي لقانون برنولي مجال تعريف المتغير العشوائي X والاحتمالات التي توافق كل قيمة من هذا المجال[1]:

- مجال تعريف X:

$\Omega_X = [0,1]$

- الصيغة الرياضية لقانون برنولي لحساب الاحتمالات:

$P(X = x) = p^x.(q)^{1-x} \qquad q = 1 - p$

ويعبر عن التوزيع الاحتمالي لقانون برنولي بالجدول التالي:

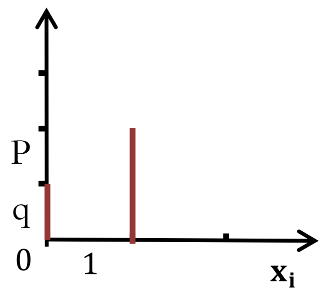
X	0	1	$\mathbf{\Sigma P(X = x_i)}$
$\mathbf{P(X = x_i)}$	Q	P	**1**

1-1-4- التمثيل البياني لتوزيع برنولي:

التمثيل البياني للتوزيع الاحتمالي لقانون برنولي يكون عن طريق الأعمدة البيانية كالتالي:

$P(X = X_i$

1 Anne. Perrut [2010]: Cours de probabilités et statistiques, Université Claude Bernard Lyon 1 , p.20.



1-1-5- الخواص العددية لقانون برنولي:

إن أهم المميزات العددية للمتغير العشوائي X في أي قانون احتمالي تتمثل في التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري:

- **التوقع الرياضي**: يعطى التوقع الرياضي بالعلاقة التالية[1]:

$$E(X) = p$$

- **التباين**: يعطى التباين بالعلاقة التالية:

$$V(X) = q.p$$

- **الانحراف المعياري**: يعطى الانحراف المعياري بالعلاقة التالية:

$$\sigma(X) = \sqrt{p.q}$$

مثال (01.3): ليكن لدينا صندوق يحتوي على 5 كرات بيضاء و3 سوداء، سحبنا عشوائيا كرة واحدة من هذا الصندوق وليكن المتغير العشوائي X يمثل عدد الكرات البيضاء المتحصل عليها في هذه التجربة.

- ما هو القانون الاحتمالي لـX مع التعليل .
- أوجد التوزيع الاحتمالي لـ X ومثله بيانيا.
- أحسب التوقع الرياضي والانحراف المعياري.

الحل:

- القانون الاحتمالي لـ X هو قانون برنولي لأن التجربة تكرر مرة واحدة (سحب كرة واحدة) ولها نتيجتان متنافيتان وهما إما الحصول على كرة بيضاء أو كرة سوداء:
- X: عدد الكرات البيضاء
- احتمال الحصول على كرة بيضاء هو: $p = \frac{5}{8}$.
- إذا احتمال الحصول على كرة ليست بيضاء (سوداء) هو: $q = 1 - p = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

[1] Whitney Huang 2014 : Lecture 11 Bernoulli and Binomial Distributions, STAT 225 Introduction to Probability Models, Purdue University , p.10.

$$\mathbf{X} \sim \mathbf{B}(\mathbf{1},\mathbf{p}) \leftrightarrow \mathbf{X} \sim \mathbf{B}(\mathbf{1},\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{8}})$$

- التوزيع الاحتمالي لX:

✓ مجال تعريف X:

$$\Omega_X = [0,1]$$

✓ حساب الاحتمالات:

$$P(X = x) = p^x.(q)^{1-x}$$
$$P(X = 0) = \left(\frac{5}{8}\right)^0.\left(\frac{3}{8}\right)^1 = \frac{3}{8}$$
$$P(X = 1) = \left(\frac{5}{8}\right)^1.\left(\frac{3}{8}\right)^0 = \frac{5}{8}$$

$X = xi$	0	1	$\sum Pi$
$P(X = xi)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	1

- حساب التوقع الرياضي$E(X)$

$$E(X) = p = \frac{5}{8}$$

- حساب التباين$V(X)$:

$$V(X) = q.p$$

$$V(X) = p.q = \frac{5}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{15}{64}$$

- حساب الانحراف المعياري $\sigma(X)$:

$$\sigma(X) = \sqrt{p.q}$$
$$\sigma(X) = \sqrt{p.q} = \sqrt{\frac{15}{64}} = \sqrt{0,23} = 0,48$$

1-2- توزيع ثنائي الحدين Binomial Distribution: $\mathbf{B(n,p)}$

1-2-1- تعريف توزيع ثنائي الحدين

قانون ثنائي الحدين هو من أهم التوزيعات الاحتمالية المتقطعة ويستخدم هذا التوزيع في التجارب التي يمكن تصنيف نتائجها إلى نتيجتين فقط، إما النجاح (تحقق الحدث الذي يهم صاحب التجربة) أو الفشل (عدم تحقق

الحدث الذي يهم صاحب التجربة[1]. قانون ثنائي الحدين هو قانون احتمالي يعبر عن n متغير عشوائي مستقل، كل متغير يتبع قانون برنولي ذو المعلمتين B(1,p) بمعنى أن قانون ثنائي الحدين يتضمن تكرار تجربة برنولي عددا من المرات (n) مع الارجاع أي أن التجارب مستقلة عن بعضها البعض، عموما يمكن القول عن متغير عشوائي منفصل X أنه يتبع قانون ثنائي الحدين ذو المعلمتين B(1,p) ، إذا كان عبارة عن مجموع n متغير عشوائي مستقل، كل متغير يتبع قانون برنولي كما يلي[2]:

$X \backsim \mathbf{B}(\mathbf{n}, \mathbf{p})$, حيث $X = x_1 + x_2 + \dots x_n$

$$x_1 \backsim \mathbf{B}(\mathbf{1}, \mathbf{p})$$
$$x_2 \backsim \mathbf{B}(\mathbf{1}, \mathbf{p})$$
$$x_n \backsim \mathbf{B}(\mathbf{1}, \mathbf{p})$$

عموما فإن شروط تحقق قانون ثنائي الحدين تكون كالتالي:

- التجربة العشوائية مكررة n مرة؛
- التجربة العشوائية لها نتيجتان متنافيتان(حالة النجاح أو حالة الفشل) ومتكاملتين لبعضهما البعض (معناه مجموع احتماليهما يساوي 1 أي: p +q =1)؛
- التجارب مستقلة عن بعضها البعض(السحب مع الارجاع)؛
- احتمال النجاح p ثابت ولا يتغير من تجربة لأخرى؛

إذا كان المتغير العشوائي X يتبع قانون فيتم التعبير عنه بالصيغة التالية[3]:

$$\mathbf{X} \backsim \mathbf{B}(\mathbf{n}, \mathbf{p})$$

حيث:

X: يمثل المتغير العشوائي في التجربة ومرتبط بالنتيجة التي يركز عليها صاحب التجربة.

B: يرمز إلى قانون ثنائي الحدين.

n: يرمز إلى عدد التجارب أي تكرار التجربة n مرة.

p: احتمال النجاح.

وبالتالي يمكننا القول عن متغير عشوائي منفصل X أنه يتبع قانون ثنائي الحدين ويعطى بالصيغة:

$$\mathbf{X} \backsim \mathbf{B}(\mathbf{n}, \mathbf{p})$$

---

[1] صلاح العيادي صالين [دون سنة]: مرجع سابق، ص 44.

[2] Jean Francois Delmas [2010]: Introduction au calcul des probabilités et à la statistique , Les Presses de l'ENSTA France , p. 31.

[3] Collin Phillips [2002]: The Binomial Distribution Mathematics Learning Centre University of Sydney. P.18. https://www.sydney.edu.au/content/dam/students/documents/mathematics-learning-centre/binomial-distribution.pdf

ومن أهم استخدامات قانون ثنائي الحدين: اختبار جودة المنتوجات (عدد الوحدات المعيبة غير المعيبة لانتاج معين مكون من n وحدة)، دراسة السوق وسبر آراء الانتخابات.

ملاحظة: إذا كان عدد التجارب $n = 1$ فإن التوزيع ثنائي الحدين يسمى توزيع برنولي. ومعالم توزيع ذو الحدين n و p حيث n هي عدد المحاولات و p هو احتمال النجاح في المحاولة الواحدة.

1-2-2- معالم توزيع ثنائي الحدين $X \rightsquigarrow \mathbf{B}(,\mathbf{p})$

يتضمن قانون ثنائي الحدين معلمتين وهما n وp:

n: يرمز إلى تكرارn تجربة مستقلة.

p: احتمال النجاح.

1-2-3- التوزيع الاحتمالي لقانون ثنائي الحدين:

يتضمن التوزيع الاحتمالي لقانون ثنائي الحدين مجال تعريف المتغير العشوائي X والاحتمالات التي توافق كل قيمة من هذا المجال:

- **مجال تعريف** X: عند تكرار تجربة برنولي n مرة بشكل مستقل فإن عدد مرات نجاح المتغير العشوائي X يكون nمرة، وبالتالي يأخذ X القيم التالية:

$\Omega_X = [0,1,2, \ldots n]$

- **الصيغة الرياضية لقانون ثنائي الحدين لحساب الاحتمالات :**

يتم حساب الاحتمالات في قانون ثنائي الحدين بالصيغة الرياضية التالية:[1]

$$P(X = x) = C_n^x . p^x . (q)^{n-x} , q = 1 - p$$

- $\mathbf{C_n^x}$: توفيقة دون تكرار؛
- **n**: حجم العينة ، أو عدد مرات تكرار التجربة.
- **p**: احتمال النجاح (تحقق الحدث الذي يهم صاحب التجربة) وهو مقدار ثابت لا يتغير خلال التجارب.
- **q**: هو احتمال الاخفاق (تحقق الحدث الذي لا يهم صاحب التجربة) $(q = 1 - p)$.

ويعبر عن التوزيع الاحتمالي لقانون برنولي بالجدول التالي:

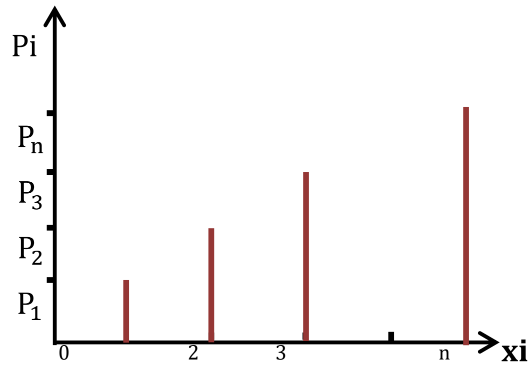
X	0	1	…	N	$\mathbf{\Sigma P(X = x_i)}$
$\mathbf{P(X = x_i)}$	$C_n^x . p^x . q^{n-x}$				1

[1] عبد الهادي الرفاعي، التوزيعات الاحتمالية ص 12.

$$\sum_{i=1}^{n} pi = \sum_{i=1}^{n} C_n^{xi}.\, p^{xi}.\, q^{n-xi} \;\; = 1$$

1-2-4- التمثيل البياني للتوزيع الاحتمالي لقانون ذو الحدين:

يتم التمثيل البياني للمتغير العشوائي المنفصل التابع لقانون ثنائي الحدين عن طريق الأعمدة البيانية



1-2-5- المميزات العددية لقانون ثنائي الحدين:

تتمثل أهم المميزات العددية لقانون ثنائي الحدين في:

- **التوقع الرياضي**: يعطى التوقع الرياضي بالعلاقة التالية

$E(X) \; = n.p$

- **التباين**: يعطى التباين بالعلاقة التالية:

$V(X) = n.p.q$

- **الانحراف المعياري**: يعطى الانحراف المعياري بالعلاقة التالية:

$\sigma(X) = \; \sqrt{n.p.q}$

1-2-6- طرق حساب الاحتمالات في قانون ثنائي الحدين

يتم حساب الاحتمالات الخاصة بمتغير عشوائي منفصل تابع لقانون ثنائي الحدين بطريقتين:

- **الطريقة الأولى**: تتم عن طريق الصيغة الرياضية لقانون ثنائي الحدين:

$P(X = x) = C_n^x.\, p^x.\, (q)^{n-x} \, , q = 1 - p$

- **الطريقة الثانية**: يتم حساب الاحتمالات عن طريق جدول ثنائي الحدين والذي يتضمن دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$، بما أن دالة التوزيع هي دالة تراكمية بحيث تعطي الاحتمالات من الشكل $P(X \leq xi)$ لذلك عند حساب الاحتمالات من الجدول يجب إجراء التحويلات التالية:

بحيث: $F(x) = P(X \leq xi)$

$$P(X = a) = F(X \leq a) - P(X \leq a - 1)$$

$$P(X < a) = P(X \leq a - 1) = F(a - 1)$$

$$P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$$

$$P(X \geq a) = 1 - P(X < a) = 1 - P(X \leq a - 1)$$

$$= 1 - F(a - 1)$$

$$P(a < x < b) = P(x < b) - P(x \leq a)$$

$$= P(x \leq b - 1) - P(x \leq a)$$

$$F(b - 1) - F(a)$$

$$P(a \leq x \leq b) = P(x \leq b) - P(x < a)$$

$$= P(x \leq b) - P(x \leq a - 1)$$

$$= F(b) - F(a - 1)$$

$$P(a \leq X < b) = P(x < b) - P(x < a) = P(x \leq b - 1) - P(x \leq a - 1)$$
$$= F(b - 1) - F(a - 1)$$

$$P(a < x \leq b) = P(x \leq b) - P(x \leq a) = F(b) - F(a)$$

- **توضيح طريقة استخدام جدول ثنائي الحدين:** نوضح الطريقة من خلال المثال التالي:

مثال (02.3) ليكن لدينا X متغير عشوائي معرف كما يلي: $X \backsim B(15{,}0{,}3)$

- أحسب $P(X = 5)$.

الحل:

لدينا: $P(X = a) = P(X \leq a) - P(X \leq a - 1) = F(a) - F(a - 1)$

$$P(X = 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 5 - 1) = F(5) - F(4) = 0{,}7216 - 0.5155 \cong 0{,}21$$

- **كيفية قراءة (5) و F(4) من جدول ثنائي الحدين:**

يتضمن جدول ثنائي الحدين قيم دالة التوزيع الاحتمالية F(X) وهي عبارة عن دالة تراكمية تعكس مجموع احتمالات الموافقة لكل قيمة من قيم مجال تعريف المتغير العشوائي X، ووفقا لمعالم قانون ثنائي الحدين والمتمثلة في حجم العينة n والاحتمال p تم تصميم الجداول على شكل أسطر تتضمن قيم الاحتمالات p (احتمال النجاح) وأعمدة تتضمن حجم العينة n ومجال تعريف المتغير العشوائي X حيث يتم قراءة الجدول من خلال لتقاطع بين حجم العينة والاحتمال بحيث يتم اسقاط احتمل قيم مجال التعريف وفقا للمعلمتين n وp.

حسب **المثال** (**02.3**) ووفقا للمعلمتين $p = 0,3$ و$n = 15$، يكون مجال تعريف X هو من $[0,1,2, \dots 12]$،نبحث عن العمود الموافق للاحتمال 0,3والسطر الموافق للعينة 15 والسطر الموافق لقيمة $\left(X = 5 \text{ و} X = 4 \right)$فنقطة تقاطع العمود الموافق لـ$p = 0,3$ مع السطر الموافق لـ $X = 4$ تكون قيمة دالة التوزيع الاحتمالية $F(X) = 0,5155$، (وهي تمثل احتمال خمس قيم $X = 4$ و $X = 3$ و$X = 2$ و $X = 1$ و$X = 0$)، أما نقطة تقاطع العمود الموافق لـ$p = 0,3$ مع السطر الموافق لـ $X = 5$ تكون قيمة دالة التوزيع الاحتمالية $F(X) = 0,7216$،، (وهي تمثل احتمال سِتُ قيم $X = 5$ و$X = 4$ و $X = 3$ و$X = 2$ و $X = 1$ و$X = 0$).

وبالتالي يكون احتمال $X = 5$ هو الفرق بين القيمتين 0,7216 و0,5155.

n	X	P		
		0,1	0,2	0,3
	0			
	1			
	2			
	3			
	4			0 ,5155
	5			0 ,7216
	...	...	...	...
	12	1	1	1

ملاحظة: إذا كان X_1 و X_2 متغيرين عشوائيين مستقلين يتبعان قانون ثنائي الحدين أي:

$$X_1 \backsim B(n_1; p) \quad \text{و} \quad X_2 \backsim B(n_2; p)$$

فإن: $(X_1 \mp X_2) \backsim B(n_1 \mp n_2; p)$

مثال(03.3): لمعرفة نسبة التلاميذ الذين يعانون من تسوس الأسنان، تم اختيار عينة عشوائية من **10** تلاميذ، ووجد أن **40 %** من التلاميذ مصابين بتسوس الأسنان.

المطلوب:

- عرف المتغير العشوائي في هذه التجربة.
- ما نوع المتغير العشوائي مع التعليل.
- ما هو القانون الاحتمالي لمتغير العشوائي **X**، مع التعليل.
- أوجد التوزيع الاحتمالي لـ**X**.
- أحسب التوقع الرياضي والانحراف المعياري.

الحل:

ـــ تعريف المتغير العشوائي:

X : عدد التلاميذ المصابون بتسوس الأسنان.

- نوع المتغير العشوائي: هو متغير عشوائي منفصل لأن عدد التلاميذ غير قابل للتجزئة.
- القانون الاحتمالي لـX هو: قانون ثنائي الحدين، وتعليل ذلك:
  - ✓ التجربة لها نتيجتان متنافيتان (مصاب بالتسوس، غير مصاب بالتسوس) ؛
  - ✓ تجربة مكررة n (10 تلاميذ).

$X \leadsto B(n,p)$

إذا:

$n = 10, p = 0{,}4$ (تحقق الهدف الذي يهم صاحب التجربة)

- X:يتبع قانون ثنائي الحدين، أي: $X \to B(10, 0{,}4)$
- حيث يمكننا ايجاد التوزيع الاحتمالي لـX بطريقتين:

الطريقة 1:

- تحديد مجال التعريف: $X \in [0,1,2 \ldots .10]$
- حساب الاحتمالات: عن طريق الصيغة الرياضية لقانون ثنائي الحدين:

$$P(X = xi) = C_n^x . p^x . (q)^{n-x}$$
$$p = 0{,}4 \to q = 1 - p = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$$
$$P(X = 0) = C_{10}^0 (0{,}4)^0 (0{,}6)^{10} = 1 \times 1 \times 0{,}006 = 0{,}006$$
$$P(X = 1) = C_{10}^1 (0{,}4)^1 (0{,}6)^9 = 10 \times 0{,}4 \times 0{,}01 = 0{,}04$$
$$P(X = 2) = C_{10}^2 (0{,}4)^2 (0{,}6)^8 = 45 \times 0{,}16 \times 0{,}017 = 0{,}12$$
$$\vdots$$
$$P(X = 10) = C_{10}^{10} (0{,}4)^{10} (0{,}6)^0 = 1 \times 0{,}0001 \times 1 = 0{,}0001$$

الطريقة 2: من خلال جدول القيم:

$$P(X = 0) = P(X \le 0) = F(0) = 0{,}0060$$
$$P(X = 1) = P(X \le 1) - P(X \le 0) = F(1) - F(0) = 0{,}0464 - 0{,}006 = 0{,}04$$
$$\vdots$$
$$P(X = 10) = (X \le 10) - P(X \le 9) = F(10) - F(9) = 1 - 0{,}9999 = 0{,}0001$$

إذا يمكن تلخيص التوزيع الاحتمالي في الجدول التالي:

Xi	0	1	…	10	$\sum pi$
Pi	0,006	0,04	…	0,0001	1

- حساب التوقع الرياضي:

$$E(X) = n.p$$
$$E(X) = n.p = 10 \times 0{,}4 = 4 \text{ تلاميذ}$$

الشرح: متوسط عدد التلاميذ المصابين بتسوس الأسنان هو 4.

– حساب الانحراف المعياري:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{n.p.q}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{10 \times 0,4 \times 0,6} = \sqrt{2,4} = 0,154$$

$$V(X) = n.p.q$$

$$V(X) = n.p.q = 10 \times 0,4 \times 0,006 = 0,024$$

1-3- التوزيع فوق الهندسي: Hypergeometric Distribution: $\mathbf{H(N,n,p)}$

1-3-1- تعريف توزيع فوق الهندسي

توزيع فوق الهندسي هو قانون احتمالي يوافق تكرار تجربة برنولي n مرة دون الارجاع ويسمى أيضا بالتوزيع التوافقي[1] ، فعندما نسحب عينة حجمها n دون الارجاع، أي أننا بصدد اجراء تجربة غير مستقلة وعليه فإن المتغير العشوائي X في القانون فوق الهندسي هو مجموع n متغير عشوائي لقانون برنولي غير مستقل، كل متغير يتبع قانون برنولي كما يلي:

$$X = x_1 + x_2 + \ldots x_n \quad , \quad \mathbf{X \sim H(N,n,p)}$$

$$x_1 \sim \mathbf{B(1,p)}$$

$$x_2 \sim \mathbf{B(1,p)}$$

$$x_n \sim \mathbf{B(1,p)}$$

عموما فإن شروط تحقق قانون ثنائي الحدين تكون كالآتي[2]:

- مجتمع إحصائي يتكون من N عنصر وهو مقسم إلى: عدد عناصر النجاح $= N_1$ وعدد عناصر الفشل $= N_2$ حيث N هو مجموع عدد عناصر النجاح وعدد عناصر الفشل $N = N_1 + N_2$؛

– التجربة العشوائية مكررة n مرة (نسحب عينة حجمها n عنصر) وكل تجربة غير مستقلة عن الأخرى(السحب دون ارجاع)؛

– التجربة لها نتيجتين متنافيتين (النجاح أو الفشل).

[1] مبارك اسبر ديب [2008]: مبادئ في الاحتمالات والاحصاء، كلية العلوم، جامعة تشرين، سوريا، ص 177.

- p احتمال تحقق الحدث الذي يهم صاحب التجربة (احتمال النجاح)، فهو مقدار غير ثابت لأن السحب يتم دون ارجاع (التجارب غير مستقلة)، ويحسب كما يلي:

$$P = \frac{\text{عدد عناصر النجاح}}{\text{عدد العناصر الاجمالي}} = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة (النجاح)}}{\text{عدد الحالات الممكنة (الاجمالية)}} = \frac{N_1}{N}$$

$$q = (1 - P) = \frac{\text{عدد عناصر الفشل}}{\text{عدد العناصر الاجمالي}} = \frac{\text{عدد الحالات غير الملائمة (الفشل)}}{\text{عدد الحالات الممكنة (الاجمالية)}} = \frac{N_2}{N}$$

وبالتالي يمكننا القول عن متغير عشوائي منفصل X أنه يتبع قانون فوق الهندسي ويعطى بالصيغة:

$$\mathbf{X \sim H(N, n, p)}$$

حيث:

X: يمثل المتغير العشوائي في التجربة ومرتبط بالنتيجة التي يركز عليها صاحب التجربة؛

H: يرمز إلى قانون فوق الهندسي؛

N: حجم المجتمع؛

n: حجم العينة أي عدد مرات تكرار التجربة؛

p: احتمال النجاح($p = \frac{N_1}{N}$).

1-3-2- معالم قانون فوق الهندسي $X \sim \mathbf{H(N, n, p)}$

يتضمن قانون فوق الهندسي ثلاث مَعلَمات:

N: تمثل حجم المجتمع؛

n: ترمز إلى حجم العينة (تكرارn تجربة غير مستقلة).

p: احتمال النجاح.

1-3-3- التوزيع الاحتمالي لقانون فوق الهندسي:

يتضمن التوزيع الاحتمالي لقانون فوق الهندسي مجال تعريف المتغير العشوائي والاحتمالات التي توافق كل قيمة من هذا المجال:

- **مجال تعريف X**: عند تكرار تجربة برنولي n مرة بشكل غير مستقل فإن عدد مرات نجاح المتغير العشوائي X يكون n مرة، وبالتالي يأخذ X القيم التالية:

$$\Omega_X = [0,1,2, \dots n]$$

- **الصيغة الرياضية لقانون فوق الهندسي لحساب الاحتمالات :**

يتم حساب الاحتمالات في قانون فوق الهندسي بالصيغة الرياضية التالية[1]:

$$P(X = xi) = \frac{C_{N1}^{x}.C_{N2}^{n-x}}{C_{N}^{n}} \quad , \quad (N = N_1 + N_2)$$

N : الحجم الاجمالي للمجتمع؛

$\mathbf{N_1}$: عدد عناصر المجتمع التي تتوفر فيها الخاصية التي يهتم بها صاحب التجربة (عناصر النجاح)؛

$\mathbf{N_2}$: عدد عناصر المجتمع التي لا تتوفر فيها الخاصية التي يهتم بها صاحب التجربة (عناصر الفشل)؛

n: حجم العينة؛

x: قيم مجال تعريف المتغير العشوائيX؛

C: توفيقة دون تكرار؛

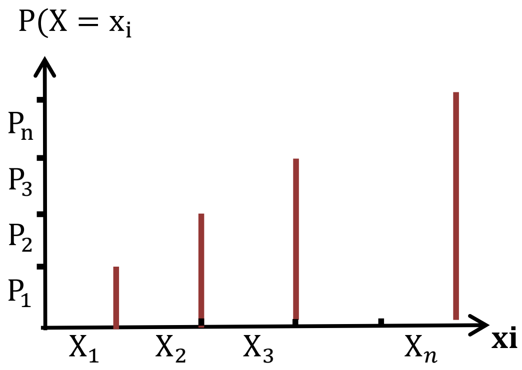
ويمكن تلخيص التوزيع الاحتمالي لقانون فوق الهندسي في الجدول التالي:

Xi	0	1	…	N	$\sum pi$
$P(X = xi)$		$\frac{C_{N1}^{x}.C_{N2}^{n-x}}{C_{N}^{n}}$			1

$$\sum \mathbf{pi} = \sum \frac{C_{N1}^{x}.C_{N2}^{n-x}}{C_{N}^{n}} = \mathbf{1}$$

1-3-4- التمثيل البياني للتوزيع الاحتمالي لقانون فوق الهندسي

يتم التمثيل البياني للتوزيع الاحتمالي لقانون فوق الهندسي بالأعمدة البيانية من خلال احداثيات (xi, pi) كما هو موضح في الشكل التالي:



1-3-5- طريقة حساب الاحتمالات لقانون فوق الهندسي

$$P(X = xi) = \frac{C_{N1}^{x}.C_{N2}^{n-x}}{C_{N}^{n}} \quad , \quad (N = N_1 + N_2)$$

[1] Y. Velenik [2016] :Probabilités et Statistique ,Université de Genève , P.35.
http://www.unige.ch/math/folks/velenik/cours.html (seen on: 11/3/201)

مثال (04.3): ليكن X متغير عشوائي يتبع القانون فوق الهندسي ذو المعالم $X \leadsto H(10, 3, 0.4)$ ، حيث أن عدد عناصر النجاح هو 4.

- أحسب $P(X = 2)$:

الحل:

$$N = 10\,, N_1 = 4\ \rightarrow N_2 = 10 - 4 = 6\,, n = 3$$

$$P(X = 2) = \frac{C_4^2 . C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{6 \times 6}{120} = \frac{36}{120}$$

1-3-6- المميزات العددية لقانون فوق الهندسي:

تتمثل أهم المميزات العددية لقانون فوق الهندسي تتمثل في التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري[1].

- **التوقع الرياضي**: يعطى التوقع الرياضي بالعلاقة التالية[2]:

$$E(X) = n.p$$

- **التباين**: يعطى التباين بالعلاقة التالية:

$$V(X) = n.p.q\left(\frac{N - n}{N - 1}\right)$$

- **الانحراف المعياري**: يعطى الانحراف المعياري بالعلاقة التالية:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{n.p.q\left(\frac{N - n}{N - 1}\right)}$$

مثال (05.3): تقدم 10 مترشحين لمسابقة توظيف أساتذة لغات من بينهم 4 يتقنون اللغة الألمانية، إذا كان عدد المناصب المفتوحة هو 3(حجم العينة).

- ليكن المتغير العشوائي X: تمثل عدد المترشحين الذين يتقنون اللغة الألمانية من بين الثلاثة المختارين عشوائيا.
- ما هو القانون الاحتمالي لـX مع التعليل.
- أوجد التوزيع الاحتمالي لـ X ومثله بيانيا.

[1] Eva Cantoni Philippe Huber Elvezio Ronchetti [2006]: Op. Cit., p. 31.

[2] صلاح العيادي صالحين [دون سنة]: مسائل وحلول في الاحصاء والاحتمالات ،مكتبة دار ابن الكثير للنشر والتوزيع، طرابلس ، ليبيا، ص44.

- أحسب التوقع الرياضي والانحراف المعياري.

الحل:

$N = 10 , N_1 = 4$ (عدد المترشحين الذين يتقنون الألمانية)، $N_2 = 6$ (عدد المترشحين الذين لا يتقنون الألمانية)

$n = 3, p = \frac{N_1}{N} = \frac{4}{10} = 0,4$

X: عدد المترشحين الذين يتقنون اللغة الألمانية من بين الثلاثة المختارين عشوائيا.

- القانون الاحتمالي لـX: هو قانون فوق الهندسي، وتعليل ذلك:
- التجربة لها نتيجتان متنافيتان (يتقن اللغة الألمانية، لا يتقن اللغة الألمانية)؛
- التجربة تكرر n مرة (اختيار ثلاث أشخاص)؛
- السحب دون ارجاع (من السياق لأنه في الواقع العملي يكون السحب دون ارجاع).

$X \backsim H(10, 3, 0.4)$

✓ التوزيع الاحتمالي لـX:

- مجال التعريف X:

$n = 3 \rightarrow \Omega_X = [0,1,2,3]$

- **حساب الاحتمالات:**

$$P(X = 0) = \frac{C_4^0 . C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1 \times 20}{120} = \frac{20}{120}$$

$$P(X = 1) = \frac{C_4^1 . C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{4 \times 15}{120} = \frac{60}{120}$$

$$P(X = 2) = \frac{C_4^2 . C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{6 \times 6}{120} = \frac{36}{120}$$

$$P(X = 3) = \frac{C_4^3 . C_6^0}{C_{10}^3} = \frac{4 \times 1}{120} = \frac{4}{120}$$

ويمكن تلخيص التوزيع الاحتمالي في جدول كالتالي:

Xi	0	1	2	3	$\sum Xi$
Pi	$\frac{20}{120}$	$\frac{60}{120}$	$\frac{36}{120}$	$\frac{4}{120}$	1

– حساب التوقع الرياضي:

$$E(X) = n.p$$
$$E(X) = 3 \times \frac{4}{10} = 1,2 \cong 1$$ مترشح

– حساب الانحراف المعياري:

$$V(X) = n.p.q.\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = 3.\frac{4}{10}.\frac{6}{10}.\left(\frac{10-3}{10-1}\right) = 0,56$$
$$\sigma(x) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{n.p.q.\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$$
$$\sigma(x) = \sqrt{0,56} = 0,75$$

4-1- توزيع بواسون[1] $P(\lambda)$: Poisson Distribution

1-4-1- تعريف قانون بواسون

يعتبر من التوزيعات الاحتمالية المشهورة، وهو قانون الحوادث ضعيفة التحقق ويعرف أيضا بقانون الحوادث النادرة الوقوع أو المستحيلة حيث يستعمل في الظواهر العشوائية المرتبطة بالزمن[2]، كعدد المكالمات التي تتلقاها مصلحة الصيانة بمؤسسة اتصالات الجزائر خلال اليوم، وعدد الأخطاء المطبعية في نص يحتوي على 1000 كلمة، عدد الزبائن الذين يستقبلهم متجر خلال ساعة...إلخ، ولتطبيق قانون بواسون يجب تحقق الشروط التالية[3]:

- أن تكون هناك نتيجتان متنافيتان.
- الحوادث مستقلة عن بعضها البعض.
- معدل أو متوسط عدد مرات النجاح في وحدة من الزمن يبقى ثابت.
- احتمال وقوع أي عدد من الحوادث، خلال فترة زمنية t يتعلق فقط بطول هذه الفترة(أي ليس ببداية الفترة).
- احتمال وقوع أي عدد من الحوادث، خلال أي فترة زمنية، مستقل عن عدد الحوادث التي وقعت قبل بداية تلك الفترة.

وبالتالي يمكننا القول عن متغير عشوائي منفصل X أنه يتبع قانون بواسون ويعطى بالصيغة العامة التالية[4]:

[1] Siméon-Denis Poisson (1781-1840)

[2] صلاح العيادي صالحين [دون سنة]: مرجع سابق، ص 50.

[3] عبد الحفيظ مصطفى[2008]:مرجع سابق، ص303.

[4] Eva Cantoni Philippe Huber Elvezio Ronchettip [2006]: Maitriser la Aléatoire, Exercices résolus de probabilité et Statistique , Springer , Verlag France, Paris , p.24.

$$\mathbf{X \sim P(\lambda)}$$

حيث:

λ: (Lambda) هي متوسط عدد مرات النجاح في وحدة الزمن (عدد مرات وقوع الحدث الذي يهم صاحب التجربة).

1-4-2- معالم توزيع بواسون $X \sim P(\lambda)$

يتضمن قانون بواسون معلمة واحدة (λ) (Lambda) هي متوسط عدد مرات النجاح في وحدة الزمن (عدد مرات وقوع الحدث الذي يهم صاحب التجربة).

1-4-3- التوزيع الاحتمالي لقانون بواسون:

يتضمن التوزيع الاحتمالي لقانون بواسون مجال تعريف المتغير العشوائي X والاحتمالات التي توافق كل قيمة من هذا المجال:

- **مجال تعريف X**: إذا كان $X \sim P(\lambda)$ ، فإن:

$$\Omega_X = [0,1,2, \dots x_{max}]$$

حيث x_{max} مرتبط بقيمة λ، وأقصى قيمة لدالة التوزيع الاحتمالية: $F(X_{max}) = 1$.

- **الصيغة الرياضية لقانون بواسون لحساب الاحتمالات**

يتم حساب الاحتمالات في قانون بواسون بالصيغة الرياضية التالية[1]:

$$P(X = x_i) = e^{-\lambda}.\frac{\lambda^x}{x!}$$

حيث:

- λ: تمثل عدد حقيقي موجب أي أن $\lambda \geq 0$ ، وهو يعكس متوسط أو معدل عدد النجاحات لحدث ما، وتساوي $\lambda = n \times p$.
- e: أساس نظام اللوغاريتمات الطبيعي ($e = 2,72$)، $e = 2,71828$
- $x!$: مضروب العدد x.
- x: هو قيم مجال تعريف المتغير العشوائي X، ويعكس مجال تعريف قانون بواسون وهو مجموعة الأعداد الطبيعية.

ويمكن تلخيص التوزيع الاحتمالي لقانون بواسون في الجدول التالي:

x	0	1	…	N	$\mathbf{\Sigma P(X = x_i)}$

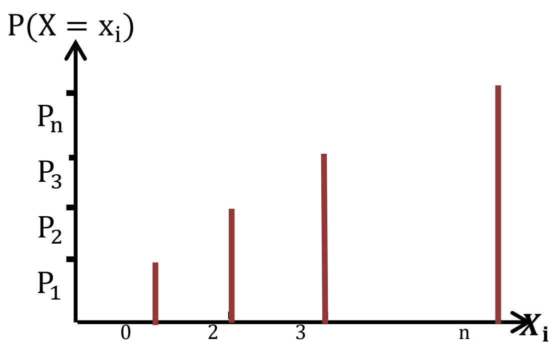
[1] جبار عبد المضحي [2011] : مرجع سابق ،ص 114.

$\mathbf{P(X = x_i)}$	$e^{-\lambda}.\frac{\lambda^x}{x!}$	1

حيث أن: $\sum_{i=1}^{n} \text{Pi} = \sum e^{-\lambda}.\frac{\lambda^x}{x!} = \mathbf{1}$

1-4-4- التمثيل البياني للتوزيع الاحتمالي لقانون بواسون

يتم التمثيل البياني للتوزيع الاحتمالي لقانون بواسون عن طريق الأعمدة البيانية:



1-4-5- المميزات العددية لقانون بواسون:

إن أهم المميزات العددية لقانون بواسون تتمثل في التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري[1].

– **التوقع الرياضي**: يعطى التوقع الرياضي بالعلاقة التالية:

$$\mathbf{E(X) = \lambda}$$

– **التباين**: يعطى التباين بالعلاقة التالية:

$$\mathbf{V(X) = \lambda}$$

– **الانحراف المعياري**: يعطى الانحراف المعياري بالعلاقة التالية:

$$\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{\lambda}}$$

ملاحظة: قانون بواسون هو القانون المنفصل الوحيد الذي يتساوى فيه التوقع الرياضي والتباين أي أن[2]:

$$E(X) = V(X) = \lambda$$

1-4-6- طرق حساب الاحتمالات في قانون بواسون

يتم حساب الاحتمالات الخاصة بمتغير عشوائي منفصل تابع لقانون بواسون بطريقتين:

[1] Anne Perrut [2010]: Op. Cit,.p.24.
[2] Eva Cantoni Philippe Huber Elvezio Ronchetti [2006]: Op. Cit., p. 24

- **الطريقة الأولى**: تتم عن طريق الصيغة الرياضية لقانون بواسون:

$$P(X = xi) = e^{-\lambda}.\frac{\lambda^x}{x!}$$

- **الطريقة الثانية**: يتم حساب الاحتمالات عن طريق جدول بواسون والذي يتضمن دالة التوزيع الاحتمالية F(x)، بما أن دالة التوزيع هي دالة تراكمية بحيث تعطي الاحتمالات من الشكل $P(X \le xi)$ لذلك عند حساب الاحتمالات من الجدول يجب إجراء التحويلات التالية:

بحيث:

$$F(x) = P(X \le xi)$$

$$P(X = a) = F(X \le a) - P(X \le a - 1)$$

$$P(X < a) = P(X \le a - 1) = F(a - 1)$$

$$P(X > a) = 1 - P(X \le a) = 1 - F(a)$$

$$P(X \ge a) = 1 - P(X < a) = 1 - P(X \le a - 1)$$

$$= 1 - F(a - 1)$$

$$P(a < x < b) = P(x < b) - P(x \le a)$$

$$= P(x \le b - 1) - P(x \le a)$$

$$F(b - 1) - F(a)$$

$$P(a \le x \le b) = P(x \le b) - P(x < a)$$

$$= P(x \le b) - P(x \le a - 1)$$

$$= F(b) - F(a - 1)$$

$$P(a \le X < b) = P(x < b) - P(x < a) = P(x \le b - 1) - P(x \le a - 1)$$
$$= F(b - 1) - F(a - 1)$$

$$P(a < x \le b) = P(x \le b) - P(x \le a) = F(b) - F(a)$$

- **توضيح طريقة استخدام جدول بواسون**: نوضح الطريقة من خلال المثال التالي:

مثال (06.3) ليكن لدينا X متغير عشوائي معرف كما يلي: $X \sim P(1)$

- أحسب $P(X = 3)$ ؟

الحل:

لدينا:

$$P(X = a) = P(X \le a) - P(X \le a - 1) = F(a) - F(a - 1)$$

$$P(X = 3) = P(X \le 3) - P(X \le 3 - 1) = F(3) - F(2) = 0{,}9810 - 0.9197 \cong 0{,}06$$

- **كيفية قراءة $F(3)$ و $F(2)$ من جدول بواسون:**

يتضمن جدول بواسون قيم دالة التوزيع الاحتمالية $F(X)$ وهي عبارة عن دالة تراكمية تعكس مجموع احتمالات الموافقة لكل قيمة من قيم مجال تعريف المتغير العشوائي X، ووفقا لمعالم قانون بواسون والمتمثلة في المعلمة الوحيدة λ وتم تصميم الجداول على شكل أسطر تتضمن قيم λ (متوسط عدد النجاحات) وأعمدة تتضمن مجال تعريف المتغير العشوائي X حيث يتم قراءة الجدول من خلال لتقاطع بين قيم مجال تعريف X و λ بحيث يتم اسقاط احتمال قيم مجال التعريف وفقا للمعلمة λ.

حسب **المثال (06.3)** ووفقا للمعلمة $\lambda = 1$ ، يكون مجال تعريف X هو من $[0,1,2,3,4,5,6,7]$،نبحث عن العمود الموافق لقيمة $\lambda = 1$ والسطر الموافق لقيمة $(X = 3$ و$X = 2)$، فنقطة تقاطع العمود الموافق لـ $\lambda =$ 1مع السطر الموافق لـ $X = 3$ تكون قيمة دالة التوزيع الاحتمالية $F(X) = 0{,}9810$، (وهي تمثل احتمال أربع قيم $X = 3$ و$X = 2$ و $X = 1$ و$X = 0$)، أما نقطة تقاطع العمود الموافق لـ$\lambda = 1$ مع السطر الموافق لـ $X = \mathbf{2}$ تكون قيمة دالة التوزيع الاحتمالية $F(X) = 0{,}9197$، (وهي تمثل احتمال ثلاث قيم $X = 2$ و $X = 1$ و$X = 0$).

وبالتالي يكون احتمال $X = 3$ هو الفرق بين القيمتين 0,9810 و0,9197.

X	Λ	
	0 ,5	1
0		
1		
2		0 ,9197
3		0 ,9810
4		
5		
6		
7	1	1

ملاحظة: إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين مستقلين يتبعان قانون بواسون أي:

$X \backsim P(\lambda_1)$

$X_2 \backsim P(\lambda_2)$

وليكن متغير عشوائي Z حيث أن:

$Z = X \mp Y$

فإن المتغير العشوائي Z يتبع أيضا قانون بواسون:

$Z \backsim P(\lambda_z = \lambda_1 \mp \lambda_2)$

حيث:

$$P(Z = zi) = e^{-(\lambda_1 \mp \lambda_2)} . \frac{\lambda_z^z}{z!}$$

مثال(07.3) : يقدر متوسط عدد الإشعارات التي يستقبلها حساب فيسبوك(λ_X) وانستغرام (λ_Y) خلال ساعة بإشعارين وإشعار واحد على التوالي، علما أن التوزيعين يتبعان قانون بواسون، المطلوب:

- حدد المتغيرين العشوائيين (X وY) في هذه المسألة.
- أحسب التوزيع الاحتمالي للمتغيرY .
- أحسب احتمال أن يتم خلال ساعة استقبال:
  - ✓ ولا إشعار في حساب انستغرام.
  - ✓ إشعارين في حساب فيسبوك.
  - ✓ على الأكثر ثلاث إشعارات في حساب انستغرام.
  - ✓ أقل من ثلاث إشعارات في حساب انستغرام.
  - ✓ ما بين إشعارين و 8 إشعارات (بما في ذلك 2 و8) في حساب فيسبوك.
- أحسب الأمل الرياضي والانحراف المعياري للمتغيرY.
- ما هو أقصى عدد ممكن للإشعارات التي يمكن أن يستقبلها حساب انستغرام.
- ليكن المتغير العشوائي Z عدد الإشعارات التي يستقبلها الحسابين معا:
  - ✓ حدد صيغة المتغير العشوائي Z وقانونه الاحتمالي؟
  - ✓ أحسب المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لعدد الإشعارات التي يستقبلها الحسابين معا.
  - ✓ ما هو احتمال أن يستقبل الحسابين معا ثلاث إشعارات .

الحل:

لدينا:

- متوسط عدد الإشعارات التي يستقبلها حساب فيسبوك خلال ساعة:

$\lambda_X = 2 \rightarrow X \backsim P(\lambda_X) \rightarrow X \backsim P(2)$

- متوسط عدد الإشعارات التي يستقبلها حساب انستغرام خلال ساعة:

$\lambda_Y = 2 \rightarrow X \backsim P(\lambda_Y) \rightarrow X \backsim P(1)$

- تحديد المتغيرين العشوائيين X وY :
  - ✓ X: عدد الاشعارات التي يستقبلها حساب فيسبوك خلال ساعة.
  - ✓ Y: عدد الاشعارات التي يستقبلها حساب انستغرام خلال ساعة.
- التوزيع الاحتمالي لـY: $Y \backsim P(1)$
- مجال تعريف Y: $Y \in \Omega_Y = [1,2,3,4,5,6,7]$
- حساب الاحتمالات: تحسب بطريقتين:

✓ **الطريقة الأولى**: تحسب عن طريق قانون بواسون:

$$P(Y = yi) = e^{-\lambda}.\frac{\lambda^{y}}{Y!}$$
$$P(Y = 0) = e^{-1}.\frac{1^{0}}{0!} = 2{,}72 \cong 0{,}3676$$

✓ **الطريقة الثانية** :عن طريق جدول قيم بواسون:

$$P(X = 0) = 0{,}3679$$
$$P(X = 1) = P(X \leq 1) - P(X \leq 0) = F(2) - F(0) = 0{,}7358 - 0{,}3679 = 0{,}3679$$
$$P(X = 2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 1) = F(2) - F(1) = 0{,}9197 - 0{,}7358 = 0{,}1839$$
$$P(X = 3) = P(X \leq 3) - P(X \leq 2) = F(3) - F(2) = 0{,}9810 - 0{,}9197 = 0{,}0613$$
$$P(X = 4) = P(X \leq 4) - P(X \leq 3) = F(4) - F(3) = 0{,}9963 - 0{,}9810 = 0{,}0153$$
$$P(X = 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 4) = F(5) - F(4) = 0{,}9994 - 0{,}9963 = 0{,}0031$$
$$P(X = 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 5) = F(6) - F(5) = 0{,}9999 - 0{,}9994 = 0{,}0005$$
$$P(X = 7) = P(X \leq 7) - P(X \leq 6) = F(7) - F(6) = 1 - 0{,}9999 = 0{,}0001$$

ويمكن تلخيص حساب الاحتمالات في جدول التالي:

Xi	0	1	2	3	4	5	6	7	$\sum Xi$
Pi	0,3679	0,3679	0,1839	0,0613	0,0153	0,0031	0,0005	0,0001	1

- حساب الاحتمالات:

$$Y \backsim P(1)\,,\quad X \backsim P(2)$$
$$P(X = 2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 1) = F(2) - F - (1) = 0{,}6767 - 0{,}4060 = 0{,}2707$$
$$P(Y \leq 3) = F(3) = 0{,}9810$$
$$P(Y < 3) = P(Y \leq 2) = F(2) = 0{,}9197$$
$$P(2 \leq X \leq 8) = P(X \leq 8) - P(X < 2) = P(X \leq 8) - P(X \leq 1) = F(8) - F(1)$$
$$= 0{,}9999 - 0{,}04060 = 0{,}5939$$

- حساب الأمل الرياضي والانحراف المعياري:

$E(Y) = \lambda_Y = 1$ إشعار

- إذا متوسط عدد الاشعارات التي يستقبلها حساب انستغرام خلال ساعة هو إشعار واحد.

$$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{\lambda} = \sqrt{1} = 1$$

- حساب أقصى عدد ممكن للإشعارات التي يمكن أن يستقبلها حساب انستغرام : هو 7 إشعارات.

$$Y \backsim P(1)$$
$$\Omega_Y = [0,1,2,3,4,5,6,7]$$
$$X_{max} = 7$$

إذا أقصى عدد ممكن للإشعارات التي يمكن أن يستقبلها حساب انستغرام هو7 إشعارات.

- صيغة المتغير العشوائي Z:
- Z: هو عدد الاشعارات التي يستقبلها الحسابين معا.

$$Y \backsim P(1)\,,\quad X \backsim P(2)$$

- القانون الاحتمالي لـ Z هو قانون بواسون:

$$Z = X + Y \leftrightarrow Z \backsim P(\lambda_X + \lambda_Y)$$

$\lambda_Z = \lambda_X + \lambda_Y = 2 + 1 = 3$
$Z \backsim P(3)$
$E(Z) = \lambda_Z = 3$
$\sigma(Z) = \sqrt{\lambda_Z} = \sqrt{3} = 1{,}73$

- حساب الاحتمالات:

$P(Z = 3) = P(Z \leq 3) - P(Z \leq 2) = F(3) - F(2) = 0{,}672 - 0{,}4232 = 0{,}224$

2- التقريب بين القوانين الاحتمالية لمتغير عشوائي منفصل:

نلاحظ في بعض الأحيان أن هناك نوع من التطابق بين قانونين من ناحية قيمة المعالم $E(X)$،$V(X)$ ، $\sigma(X)$،وكذلك الاحتمالات[1]، فنقصد بالتقارب بين التوزيعات الاحتمالية، إيجاد أو اعطاء نتائج متقاربة بخصوص احتمال معين، ومما يعني امكانية استخدام توزيعين احتماليين وأحيانا أكثر لحساب الاحتمالات ودراسة التوزيعات.

2-1- التقريب بين قانون فوق الهندسي وقانون ثنائي الحدين:

عندما يكون حجم العينة n صغيرا جدا مقارنة بحجم المجتمع N فإن معامل الشمولية $\frac{N-n}{N-1}$ يؤول إلى الواحد، وتصبح قيمة التباين هذا القانون تساوي قيمة التباين الذي توصلنا إليها في قانون ثنائي الحدين، وكنتيجة عامة إذا كان $\frac{n}{N} \leq 0{,}05$، فنقول عن متغير عشوائيX الذي يتبع القانون فوق الهندسي$X \rightarrow H(N, n, p)$ أنه يمكن تقريبه بواسطة قانون ثنائي الحدين $B \backsim (\mathbf{n}, \mathbf{p})$ ، إذا توفر الشرط التالي:

$\frac{n}{N} \leq 0{,}05$ *

- القانون الأصلي لـX: $X \backsim H(N, n, p)$

$$P(X = x) = \frac{C_{N_1}^{x} \times C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n}$$
$E(X) = n.p$

$$V(X) = n.p.q\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

- القانون المقرب إليه: $X \backsim H(N, n, p) \rightarrow X \backsim B(n, p)$

حيث n صغيرة جدا بالنسبة لحجم المجتمع N. $\frac{n}{N}.100 \leq 5\%$

$E(X) = n.p$

[1] كراس

* تشير بعض المراجع أنه يمكن تقريب قانون فوق الهندسي إلى قانون ثنائي الحدين، إذا توفر الشرط:$\frac{n}{N} \leq 0{,}1$ ، أنظر:
-Ricco Rakotomalala [SA]:Op . Cit.,p.45.

$V(X) = n.p.q$

لأن: $\lim\limits_{N\to+\infty} \frac{N-n}{N-1}$

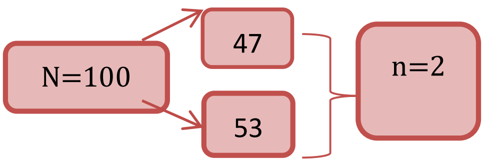
مثال(08.3): يتكون مجلس الشيوخ الأمريكي من 100 عضو، 47 منهم ينتمون للحزب الديموقراطي و53 منهم ينتمون للحزب الجمهوري، بحيث يتم اختيار شخصين منهم لرئاسة البرلمان.

ليكن المتغير العشوائي X يمثل عدد أعضاء البرلمان من الحزب الديموقراطي الذين تم اختيارهم.

- ما هو القانون الاحتمالي الأصلي لـX.
- ما هو القانون الاحتمالي الذي يمكن أن نقرب إليه.
- أوجد التوزيع الاحتمالي لـX.
- أحسب الأمل الرياضي والانحراف المعياري.

الحل:

X : عدد الأعضاء من بين الحزب الديموقراطي



- القانون الاحتمالي الأصلي لـX:هو القانون فوق الهندسي لأنه من الضروري اختيار الأعضاء دون الارجاع (عضوين مختلفين)، $X \sim H(N,n,p)$
- نلاحظ أن حجم العينة $n = 2$ يبدو صغيرا مقارنة بحجم المجتمع $N = 100$ و $\frac{n}{N} < 5\%$ وعليه نقرب إلى قانون ثنائي الحدين $X \sim B(n,p)$ لأن شرط التقريب قانون فوق الهندسي إليه متوفر.
- التوزيع الاحتمالي:

لدينا: $n = 2 \quad , \quad P = \frac{47}{100} = 0{,}47$

$X \sim H(100,2,0{,}47) \to X \sim B(2,0{,}47)$

$$P(X = 1) = \frac{C_{47}^{1}.C_{53}^{1}}{C_{100}^{2}} = \frac{47 \times 53}{4950} = 0{,}0002 \cong 0{,}50$$

$$P(X = 1) = C_n^x.P^x q^{n-x} \quad , \quad P = 0{,}47 \to q = 0{,}53$$

$P(X=0) = C_2^0.(0,47)^0.(0,53)^2 = 1 \times 1 \times 0,53^2 = 0,2809$

$P(X=1) = C_2^1.(0,47)^1.(0,53)^1 = 2 \times 0,47 \times 0,53 = 0,4982$

$P(X=2) = C_2^2.(0,47)^2.(0,53)^0 = 1 \times 0,47^2 \times 1 = 0,2209$

ويمكن تلخيص ذلك كالتالي:

X	0	1	2	$\sum Pi$
$P(X=x)$	0,2809	0,4982	0,2209	1

- حساب التوقع الرياضي والانحراف المعياري في حالتين:

$X \sim H(100, 2, 0,47) \rightarrow X \sim B(2, 0,47)$
$E(X) = n.p = 2 \times 0,47$
$V(X) = n.p.q\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = 2 \times (0,47)(0,53).\frac{47-2}{47-1} =$
$E(X) = n.p = 2 \times 0,47$
$V(X) = n.p.q = 2 \times 0,47 \times 0,53 = 0,4982$
$\sigma(X) = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{0,49} = 0,70$

- نلاحظ أن النتائج متقاربة جدا.

2-2- التقريب بين قانون ثنائي الحدين إلى قانون بواسون:

بالإضافة إلى استخدامات توزيع بواسون، فإن لهذا التوزيع استخدام شائع، فهو يعتبر تقريبا جيدا للتوزيع الثنائي، نصادف في التطبيقات العملية تجارب ثنائية تكون n كبيرة جدا وP صغيرة جدا $(p \approx 0)$بحيث أن جدائهما $n.p$ مساويا لمتوسط عدد النجاحات**λ** عدد ثابت[1]. نقول عن متغير عشوائيX الذي يتبع القانون ثنائي الحدين $X = B(n,p)$ أنه يمكن تقريبه بواسطة قانون بواسون $P(\lambda)$ ، إذا تحققت الشروط التالية بحيث يكون التقريب كما يلي [2]:

$(n \geq 30), (p < 0,1) \quad , \quad (np < 5)$

إذا القانون الثنائي $B(n,p)$ يمكن تقريبه بواسطة قانون بواسون $P(\lambda)$ مع $(\lambda) = np$. والغاية من هذا تسهيل الحسابات لأنه يوجد جداول تعطي القيمة $e^{-\lambda}$ من أجل قيم مختلفة لـλ .

- **القانون الأصلي لـX:** $\mathbf{X \sim B(n,p)}$

[1] عبد الحفيظ مصطفى [2008]: مرجع سابق ، ص313.

[2] MURRAY R. SPIEGEL, LARRY J. STEPHENS (2008) :theory and problems of statistics, Schaum's Outline Series, 4th Ed, Mc GRAW-HILL, New York, US, p.176.

$P(X = x) = C_n^x P^x q^{n-x}$
$E(X) = n.p$

$\sigma(X) = \sqrt{n.p.q}$

- القانون المقرب إليه: $X \backsim B(n,p) \to X \backsim P(\lambda)$

حيث: $(n \geq 30), (p < 0,1) \quad , \ (np < 5)$

$E(X) = n.p = \lambda$

$\sigma(X) = \sqrt{n.p.q} \approx \sqrt{\lambda}$

مثال(09.3): توضح الخبرة الماضية أن 1%من مصابيح الكهرباء المنتجة في أحد المصانع هي مصابيح غير صالحة، في عينة من 100 مصباح، أحسب احتمال وجود :

- أكثر من مصباح غير صالح.
- مصباح واحد غير صالح.
- وجود ما بين 0 و3 مصابيح غير صالحة (بما في ذلك 0).

✓ باستعمال قانون ثنائي الحدين.

✓ باستعمال قانون بواسون كتقريب لقانون ثنائي الحدين.(تأكد من شروط التقريب).

✓ قارن النتائج، ماذا تلاحظ؟

✓ أحسب التوقع الرياضي والانحراف المعياري والتباين ، ما ذا تلاحظ؟

✓ ما أقصى عدد محتمل للمصابيح المعيبة في العينة قبل وبعد التقريب.

الحل:

لدينا: $P = 1\% = 0,01 \quad , \quad n = 100 \quad , \quad N = ?$

- حساب الاحتمالات باستعمال قانون ذو الحدين:

$X \backsim B(100, 0,01) \quad , \quad X \in \Omega = [0,1,2 \dots 100]$

$P(X = 1) = C_{100}^1 . (0,01)^1 . (0,99)^{99} = 0,3697 \cong 0,37$

$$P(X > 1) = P(X = 2) + \dots + P(X = 100) = 1 - P(X < 2) = 1 - \big(P(X = 0) + P(X = 1)\big)$$
$$= 1 - (0,3660 + 0,3697) = 0,2643$$

$$P(0 \leq X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,3660 + 0,3697 + 0,1848 = 0,9205 \cong 0,92$$

- حساب الاحتمالات باستعمال قانون بواسون:
- نلاحظ أن: $P = 0,01$ احتمال ضعيف (ظاهرة نادرة)؛
- العينة $n = 100$ كبيرة؛
- توفر شروط التقريب:$np = 1 < 5$ وعليه فإننا نقرب لقانون بواسون.

$X \backsim P(\lambda) \quad ,\lambda = np = 1 \ \rightarrow \lambda \backsim P(1)$

ومن جدول بواسون: $X \in \Omega = [0,1,2,3,4,5,6,7]$

$F(1) = P(X = 1) = 0,3679 \cong 0,37$

$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0 = 0,7358 = 0,2642$

$P(0 \leq X < 3) = 0,9197 \cong 0,92$

- نلاحظ أن الاحتمالات جد متقاربة وعليه نفضل التقريب للحصول على الاحتمالات بطريقة أسرع وأسهل.
- حساب التوقع الرياضي والانحراف المعياري والتباين:

$E(X) = n.p = 0,01 \times 100 = 1$

$V(X) = n.p.q = 100(0,01)(0,99) \cong 1$

$\sigma(X) = \sqrt{V(x)} = 0,995 \cong 1$

- نلاحظ أن: $E(X)$ يساوي $V(X)$ وهذا دليل حسابي على أن الفكرة نادرة.
- حساب أقصى عدد ممكن للمصابيح المعيبة في العينة:
- من جدول بواسون نجد: $\lambda = 1 \ \rightarrow X_{max} = 7$ مصابيح
- قبل التقريب (وهو مستحيل حساب أقصى عدد ممكن): $X_{max} = 100$

3- التوزيعات الاحتمالية المتصلة

نقصد بها القوانين الاحتمالية التي يكون فيها المتغير العشوائي من النوع المستمر.

3-1- التوزيع الطبيعي العام Normal Distribution $N(m, \sigma)$

من أهم التوزيعات الاحتمالية المستمرة نظرا لأهميته الاحصائية العديدة، ويعرف أيضا باسم Gauss Distribution[1] حيث يستخدم في وصف الكثير من المتغيرات العشوائية ذات الانتشار الواسع، وذلك لسهولة استخدامه في النواحي التطبيقية كالاستدلال الاحصائي وموضوع التقدير، كما يكمن تقريب كل التوزيعات إليه في حالة حجم العينة كبير[2] وبدراسة شكل منحنى التوزيع الطبيعي نجد أنه منحنى متماثل حول المتوسط الحسابي للتوزيع ، وحيث أن التوزيع الطبيعي يعبر عن متغيرات عشوائية متصلة فإننا لا نستطيع استخدام دالة التوزيع له لإيجاد احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي الذى يتبعه لقيمة معينة(قيمة ثابتة) حيث أن هذا الاحتمال يساوى صفرا. ولكن يمكن استخدام دالة التوزيع الطبيعي لإيجاد احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي أقل من قيمة معينة أو أكثر من قيمة معينة أو تقع قيمته بين قيمتين معلومتين. ويوجد تحت هذا التوزيع صيغتين، قانون الطبيعي العام والقانون الطبيعي المعياري.

3-1-1- تعريف القانون الطبيعي العام[3]

نقول عن متغير عشوائي متصل أنه يتبع القانون الطبيعي ذو المعلمتين m و σ، عندما يأخذ X كل القيم الممكنة داخل المجال $]-\infty, +\infty[$ ، حيث يمثل m المتوسط الحسابي للمتغير العشوائي X و σ انحرافه المعياري، نعبر عنه رياضيا بالصيغة التالية:

$$X \backsim \mathbf{N}(\mathbf{m}, \boldsymbol{\sigma})$$

حيث:

N: ترمز للقانون الطبيعي؛

m: المتوسط الحسابي للمتغير العشوائي؛

σ: الانحراف المعياري للمتغير العشوائي.

- **خصائص القانون الطبيعي**[4] :

[1] Gauss Distribution

[2] جبار عبد المضحي [دون سنة]: مرجع سابق، ص 160.

[3] خالد زهدي خواجة[دون سنة]:أساسيات الاحتمالات، المعهد العربي للتدريب والبحوث الاحصائية، عمان، الأردن، ص 168.

[4] Le Digabel (2017) : Loi normale et théorème central limite, Ecole Polytechnique de Montréal, V 2, p. 5. disponible sur le lien : https://www.gerad.ca/Sebastien.Le.Digabel/MTH2302D/7_loi_normale.pdf (vu le: 03/01/2020)

- ✔ منحنى التوزيع الطبيعي منحنى متناظر حول متوسط التوزيع والذي يرمز له بالرمز m .
- ✔ المتوسط والوسيط والمنوال للتوزيع الطبيعي متساوية القيمة.
- ✔ المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي تساوى الوحدة المربعة وهذه المساحة تعبر عن مجموع الاحتمالات.

3-1-2- دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي

دالة الكثافة الاحتمالية للقانون الطبيعي هي دالة رياضية لمتغير عشوائي متصل تأخذ منحنى بشكل جرس متناظر معرفة كما يلي[1]:

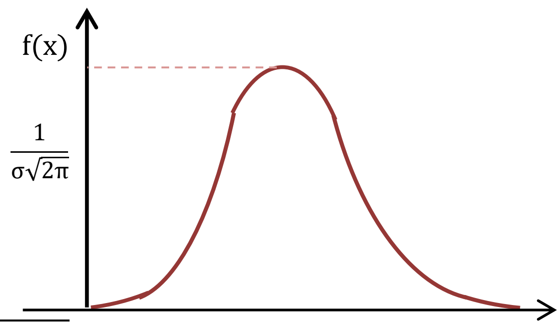
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} \qquad , \qquad x \in]-\infty, +\infty[$$

حيث أن:

- **m**: يمثل المتوسط الحسابي للقانون الطبيعي.
- **σ** : يمثل الانحراف المعياري للقانون الطبيعي.
- **π** عدد ثابت يساوي تقريبا 3,14.
- ***e***: عدد ثابت يساوي تقريبا 2,72.

3-1-3- التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية:

يكون التمثيل البياني لدالة لكثافة الاحتمالية عن طريق منحنى متناظر حول قيمة كل من المتوسط الحسابي، الوسيط والمنوال، ويكون بشكل جرس كما هو موضح في الشكل التالي[2]:



[1] ميسم جديد[دون سنة]:تطبيقات في الاحصاء الهندسي ، ص 94.

[2] F.M. Dekking C. Kraaikamp H.P. Lopuhaa¨ L.E. Meester : Op. Cit., p. 65.

m x

ملاحظات[1]:

- يكون منحنى دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي متماثل حول المتوسط؛
- تعتمد دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي $\mathbf{N(,\sigma)}$ على معلمتين التوزيع وهما المتوسط $\mathbf{m}$ الذي يحدد موضع التوزيع والانحراف المعياري $\boldsymbol{\sigma}$ الذي يحدد شكل وتشتت التوزيع ولذلك نكتب $\boldsymbol{X} \backsim \mathbf{N(m,\sigma)}$ ؛
- المساحة الكلية تحت منحنى الدالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي تساوي الواحد؛
- على أساس أن دالة التوزيع الاحتمالية $\boldsymbol{F(x)}$ هي تكامل دالة الكثافة الاحتمالية $\boldsymbol{f(x)}$.

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx$$

4-1-3- المميزات العددية للقانون الطبيعي

تتمثل المميزات العددية للقانون الطبيعي في التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري[2].

- **التوقع الرياضي**: يعطى التوقع الرياضي بالعلاقة التالية:

$$E(X) = m$$

- **التباين**: يعطى التباين بالعلاقة التالية:

$$V(X) = \sigma^2$$

- **الانحراف المعياري**: يعطى الانحراف المعياري بالعلاقة التالية:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sigma$$

ملاحظة: إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين مستقلين يتبعان القانون الطبيعي المعياري، حيث:

$$X \backsim N(m_1,\sigma_1) \quad , Y \backsim N(m_2,\sigma_2)$$

وليكن U متغير عشوائي مستمر حيث أن: $Z = X + Y$ فإنه يتبع أيضا القانون الطبيعي المعياري، أي:

$$U \backsim N(m_U,\sigma_U)$$

$$m_U = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = m_1 + m_2$$

[1] عبد الله شيحة ص 22.

[2] Le Digabel 2017 : Op. Cit. , p. 7.

$V(U) = V(X + Y) = V(X) + V(Y) = \sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2$

$U = X + Y \backsim N(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2})$

$U = X - Y$

فإن: $Z \backsim N(m_Z, \sigma_Z)$

$m_Z = E(X - Y) = E(X) - E(Y) = m_1 - m_2$

$V(Z) = V(X - Y) = V(X) + V(Y) = \sigma_1{}^2 - \sigma_2{}^2$

$Z = X - Y \backsim N(m_1 - m_2, \sqrt{\sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2})$

مثال(10.3):بطلب من إدارة محطة القطار لمدينة سطيف تمت المراقبة المستمرة لحركة المسافرين عبر محطة المدينة خلال كل أيام السنة وبمعدل قطار في كل يوم يختار عشوائيا، يتم تسجيل في كل مرة:

- عدد المسافرين الذين يدخلون المحطة على متن القطار (نرمز له بـ:X)
- عدد المسافرين الذين ينزلون من القطار (نرمز له بـ:Y)
- عدد المسافرين الذين يصعدون من محطة المدينة (نرمز له بـ:U)

1- ما هي طبيعة المتغيرات: U،Y،X مع التعليل؟

2- بعد تحليل النتائج تبين ما يلي: $X \backsim N(50; 15)$ ، $Y \backsim N(40; 10)$ ، $U \backsim N(30; 6)$. نعرف المتغير M على أنه عدد المسافرين الذين يأخذهم القطار عندما يغادر مدينة سطيف.

أ- ما هي طبيعة وصيغة المتغير M ؟

ب- ما هو القانون الاحتمالي الذي يتبعه المتغير M مع التعليل؟

ج- أحسب الأمل الرياضي والانحراف المعياري للمتغير M ؟

الحل:

1- طبيعة المتغيرات: U،Y،X هي متغيرات عشوائية لأن القطار يختار بطريقة عشوائية.

2- أ- طبيعة وصيغة المتغير M :

- **طبيعة المتغير M** : متغير عشوائي لأنه يرتبط بالمتغيرات العشوائية U،Y،X.
- **صيغة المتغير M** : $M = X - Y + U$

2- ب- القانون الاحتمالي الذي يتبعه المتغير M مع التعليل:

- **القانون الاحتمالي الذي يتبعه المتغير M**:هو القانون الطبيعي.
- **التعليل**: لأن المتغيرات U،Y،X تخضع إلى القانون الطبيعي.

2- ج- حساب الأمل الرياضي والانحراف المعياري للمتغير M :

- **حساب الأمل الرياضي للمتغير M :**

$E(M) = E(X - Y + U) = E(X) - E(Y) + E(U) = 50 - 40 + 30 = 40$ مسافر

– حساب الانحراف المعياري للمتغير M :

$V(M) = V(X - Y + U) = V(X) + V(Y) + V(U) = 15^2 + 10^2 + 6^2 = 361$

$\sigma(M) = \sqrt{V(M)} = \sqrt{361} = 19$ مسافر

3-2- القانون الطبيعي المعياري Standard Normal Law $N(,1)$

3-2-1- تعريف القانون الطبيعي المعياري

نلاحظ أن الصيغة الرياضية لدالة الكثافة الاحتمالية للقانون الطبيعي معقدة وبالتالي من الصعب جدا استعمالها في حساب الاحتمالات، ولذلك تم استنباط قانون أبسط وأسهل للاستعمال في الواقع العملي والدراسات الميدانية، وهو القانون الطبيعي المعياري أو المنمط ويتم الحصول عليه في ادخال تغير بسيط على المتغير العشوائي الأصلي X وذلك بتعريف متغير عشوائي جديد. نقول عن متغير عشوائي متصل أنه يتبع القانون الطبيعي المعياري عندما يأخذ X كل القيم الممكنة المنتمية للمجال $]-\infty,+\infty[$ بمتوسط حسابي m انحراف معياري σ، ويتحول المتغير الطبيعي العشوائي العام X إلى المتغير الطبيعي المعياري Z من خلال تعديل يتمثل في طرح المتوسط الحسابي من المتغير X وقسمة النتيجة على الانحراف المعياري، وبذلك فإن المتغير الجديد Z حيث $Z = \frac{x-m}{\sigma}$ يسمى بالمتغير المعياري، وبهذا يتحول التوزيع الطبيعي إلى توزيع طبيعي معياري متوسط حسابي m يساوي الصفر، وتباينσ يساوي الواحد.[1]

إذا كان المتغير العشوائي X يتبع التوزيع طبيعي، فإنه يمكن الانتقال من القانون الطبيعي العام إلى القانون الطبيعي المعياري كالتالي:

$$X \backsim \mathbf{N(m,\sigma)}, \qquad \mathbf{X \to Z = \frac{X-m}{\sigma} \to} \qquad \mathbf{Z \backsim (0,1)}$$

وحيث أن[2]:

- **Z** :القيمة المعيارية أو المقياسية المقابلة لقيم **X**؛
- **X**:المتغير العشوائي؛
- **0**: المتوسط الحسابي**m** للمتغير العشوائي**Z**؛
- **1**: الانحراف المعياري **σ** للمتغير العشوائي**Z**؛

3-2-2- دالة الكثافة الاحتمالية للقانون الطبيعي المعياري:

[1] F.M. Dekking C. Kraaikamp H.P. Lopuhaa¨ L.E. Meester : Op ,Cit. p 65.

[2] على عبد الزهرة حسن[2020]: الاحصاء الحيوي 1/كلية الادارة والاقتصاد، المرحلة الثالثة، ص2،متوفر على الرابط: شوهد ().

دالة الكثافة الاحتمالية للقانون الطبيعي هي دالة رياضية لمتغير عشوائي متصل تأخذ منحنى بشكل جرس متناظر معرفة كما يلي[1]:

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{1}{2}Z^2} \quad , \quad Z \in]-\infty,+\infty[\quad , \quad Z = \frac{X-m}{\sigma}$$

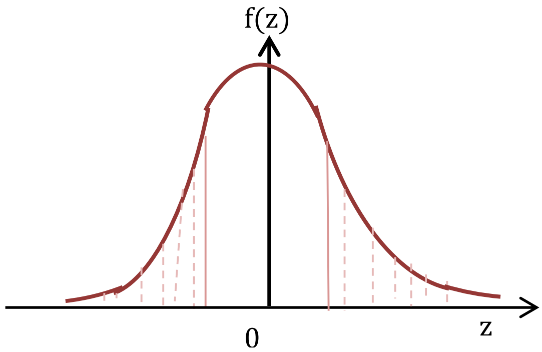
حيث أن:

- **Z**: يمثل المتغير الطبيعي المعياري؛
- **π**: عدد ثابت يساوي تقريبا 3,14؛
- ***e***: عدد ثابت يساوي تقريبا 2,72.

ملاحظة: دالة الكثافة الاحتمالية f(z) ذات صيغة مبسطة مقارنة بدالة الكثافة الاحتمالية للقانون الطبيعي العام f(x) وتعطي نفس الاحتمالات التي تعطينا إياها f(x) ، وللإشارة توجد جداول خاصة تعطي قيم F(x) ندعوها بالجداول الطبيعية.

3-2-3- التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية f(z):

يكون التمثيل البياني لدالة لكثافة الاحتمالية عن طريق منحنى متناظر حول قيمة كل من المتوسط الحسابي، الوسيط والمنوال، حيث: $\mathbf{m = 0}$ بشكل جرس، كما هو موضح في الشكل التالي:



$$\mathbf{f(-z) = f(z)}$$

4-2-3- دالة التوزيع الاحتمالية للقانون الطبيعي المعياري:

دالة التوزيع للقانون الطبيعي المعياري تحقق نفس الشروط التي تحققها أي دالة توزيع، ويرمز لدالة التوزيع الاحتمالية للقانون الطبيعي المعياري بـ**F(x)** وهو تكامل دالة الكثافة الاحتمالية وهي دالة منحنى له شكل الجرس متناظر معرفة كما يلي:

[1] Anne. Perrut : Op. Cit., p.30.

$$F(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} f(z)dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{\frac{-1}{2}z^2}\, dz$$

- **خصاص دالة التوزيع الاحتمالية $F(z)$** :
- تكون دالة التوزيع الاحتمالية محصورة دائما بين الصفر والواحد أي: $0 \leq F(z) \leq 1$؛
- عندما يؤول X إلى $-\infty$ فإن دالة التوزيع الاحتمالية تساوي الصفر أي: $\lim_{z\to-\infty} F(z) = 0$ ؛

عندما يؤول X إلى $+\infty$ فإن دالة التوزيع الاحتمالية تساوي الواحد أي: $\lim_{z\to+\infty} F(z) = 1$.

3-2-5- المميزات العددية للقانون الطبيعي المعياري

تتمثل أهم المميزات العددية للقانون الطبيعي المعياري في التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري.

- **التوقع الرياضي**: يعطى التوقع الرياضي بالعلاقة التالية:

$$E(Z) = m = 0$$

- **التباين**: يعطى التباين بالعلاقة التالية:

$$V(Z) = 1$$

- **الانحراف المعياري**: يعطى الانحراف المعياري بالعلاقة التالية:

$$\sigma(Z) = 1$$

3-2-6- كيفية حساب الاحتمالات في القانون الطبيعي المعياري:

نظرا لصعوبة وتعقد حساب الاحتمالات باستخدام دالة الكثافة الاحتمالية $\mathbf{f(x)}$ للقانون الطبيعي العام، تم تبسيط صيغتها إلى دالة أسهل في الواقع العلي وهي دالة الكثافة الخاصة بالقانون الطبيعي المعياري $\mathbf{f(z)}$. وبدل حساب الاحتمالات $\mathbf{P(z_i)}$ من خلال تكامل دالة الكثافة الاحتمالية في كل مرة، قام علماء الإحصاء بتصميم جدول يتضمن كل الاحتمالات الممكنة لقيم $\mathbf{Z_i}$ وسمي بجدول القانون الطبيعي المعياري.

$$P(Z < z) = \int_{-\infty}^{z} f(z)dz = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

يتم حساب الاحتمالات بعد تحويل المتغير العشوائي التابع للقانون الطبيعي العام **X** إلى متغير طبيعي معياري Z_i، **حيث**: $\mathbf{Z = \frac{X-m}{\sigma}}$، ثم إسقاط قيمة Z_i على الجدول والتي هي عبارة عن حاصل جمع قيمة السطر مع قيمة العمود(قيمة Z_i: سطر (الرقم الأول بعد الفاصلة)+ عمود (الرقم الثاني بعد الفاصلة)،(الملحق رقم).

أي أن نتيجة الاحتمال والذي هو عبارة عن قيمة دالة التوزيع الاحتمالية $\mathbf{F(z)}$ والناتجة عن تكامل دالة الكثافة الاحتمالية $\mathbf{f(z)}$ تتلخص مباشرة في احتمال قيمة $\mathbf{Z_i}$ الناتجة عن تقاطع السطر والعمود.

ويجب تحويل المتغير العشوائي التابع للقانون الطبيعي العام **X** إلى المتغير المعياري Z حتى يتم التمكن من استخدام الجدول مباشرة في حساب احتمالات قيم z_i دون اللجوء إلى الحسابات المعقدة لتكامل $f(z)$.

ملاحظات مهمة:

- جدول التوزيع الطبيعي المعياري يتضمن فقط الاحتمالات قيم z_i الموجبة $\boldsymbol{z \in [0,+\infty[}$ وبالتالي باقي القيم السالبة $\boldsymbol{z \in]-\infty,0]}$، يتم حساب احتمالاتها عن طريق خاصية التناظر لأن دالة الكثافة الاحتمالية $f(z)$ متناظرة حول المحور $m = 0$:

$$f(-z) = f(z)$$

$$P(Z \leq -z) = P(Z > z_i) = 1 - P(Z < z_i)$$

- في حالة كان الاحتمال Z_i معلوم وقيمة z_i مجهولة($P(Z < z_i) = p$)فإنه يتم استخدام جدول القانون الطبيعي المعياري الخاص بالقيم الموافقة للاحتمالات المعلومة(الملحق رقم ...). يتضمن هذا الجدول مدخلين للقراءة **مدخل علوي** (ناتج عن تقاطع الأسطر على الجهة اليسرى (رقمين بعد الفاصلة) مع الأعمدة العلوية(الرقم الثالث بعد الفاصلة))، ويستخدم هذا المدخل في حالة كان الاحتمال أقل من أو يساوي 0,5 وتأخذ قيمة **z**سالبة (كل القيم الموجودة في الجدول موجبة وبهذا تأخذ قيمة **Z** سالبة بدلالة القيمة الموجبة المناظرة لها). و**مدخل سفلي** (ناتج عن تقاطع الأسطر(رقمين بعد الفاصلة) على الجهة اليمنى مع الأعمدة السفلية(الرقم الثالث بعد الفاصلة))، ويستخدم هذا المدخل في حالة كان الاحتمال أكبر أو يساوي من 0,5 وتأخذ قيمة **z** موجبة كما هي في الجدول .

مثال(11.3): ليكن لدينا X متغير عشوائي معرف كما يلي: $X \rightsquigarrow N(291,88)$

- أحسب $P(X \leq 391)$ ؟

الحل:

لدينا:

$$P(X \leq 391) \rightarrow P\left(\frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{391-291}{88}\right) = P(Z \leq 1{,}14) = F(1{,}14) = 0{,}8729 = 87{,}29$$

- **كيفية قراءة $\mathbf{F(1,14)}$ من جدول الطبيعي المعياري:**

لقراءة قيمة $z = 1,14$ نستخدم جدول القانون الطبيعي المعياري الأول (الملحق رقم)، يتم تجزئة الرقم 1,14 إلى قيمتين: القيمة 1,1 تقرأ في السطر(الرقم الأول بعد الفاصلة) ومع القيمة 0,04 تقرأ من العمود (الرقم الثاني بعد الفاصلة)، وبالتالي فإن تقاطع القيمتين (تقاطع السطر 1,1 مع العمود 0,04) هو احتمال $z = 1,14$ والمتمثل في القيمة 0,8729.

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0					0,5160
0,1					0,5557
…					…
1,0					0,8508
1,1					0,8729
…					…
2,9					0,9984

مثال(12.3): أحسب قيمة z_i حيث:

$$P(Z < z_i) = 0,522$$

بما أن:

$$P = 0,522 > 0,5$$

إذن: نستخدم المدخل السفلي في القراءة من جدول قانون الطبيعي المعياري رقم 2 (تقاطع الأسطر على الجهة اليسرى مع الأعمدة السفلية).[1]

- **كيفية قراءة (0,522) من جدول الطبيعي المعياري رقم 2**:

لقراءة قيمة $P = 0,522$ نستخدم جدول القانون الطبيعي المعياري (الملحق رقم...)، يتم تجزئة الرقم 0,522 إلى قيمتين: القيمة 0,52 تقرأ في السطر من الجهة اليمنى (الرقم الأول والثاني بعد الفاصلة) ومع القيمة 0,002 تقرأ من العمود السفلي (الرقم الثالث بعد الفاصلة)، وبالتالي فإن تقاطع القيمتين (تقاطع السطر 0,52 مع العمود 0,002) هو قيمة Z الموافقة للاحتمال $P = 0,522$ والمتمثلة في قيمة $z = 0,0552$.

[1] أنظر الملحق رقم 2.

P	0,000	...	0,008	0,009	0,010	
0,00						0,99
0,01						0,98
…						...
0,47			0,0552			0,52
0,48						0 ,51
0 ,49						0,50
	0,010	...	0,002	0,001	0,000	P

4- التقريب بين القوانين الاحتمالية لمتغير عشوائي منفصل والقانون الطبيعي

4-1- تقريب قانون ثنائي الحدين إلى القانون الطبيعي

بما أن المتغير العشوائي الذي التوزيع ثنائي الحدين هو متغير منفصل، فهذا يعني أن هناك عددًا قابلاً للعد من النتائج التي يمكن أن تحدث في التوزيع ذي الحدين، مع الفصل بين هذه النتائج. مع طبيعة المتغير المنفصل للتوزيع ذي الحدين، نقول عن متغير عشوائيX الذي يتبع القانون ثنائي الحدين $X = B \rightarrow (n,p)$ أنه يمكن تقريبه إلى قانون الطبيعي $N(m,\sigma)$ ، إذا استوفى الشروط التالية بحيث يكون التقريب كما يلي[1] :

- عندما يكون حجم العينة كبير $n \geq 30$؛
- احتمالp غير ضعيف $0,3 \leq p \leq 0,7$؛[*]

[1]https://www.greelane.com/ar/%d8%a7%d9%84%d8%b9%d9%84%d9%88%d9%85%d91%d9%8a%d8%a7%d8%b6%d9%8a%d8%a7%d8%aa/normal-approximation-to-the-binomial-distribution-3126589/

[*] أشارت بعض المراجع إلى أنه يمكن التقريب بين قانون ثنائي الحدين والقانون الطبيعي إذا كان حجم العينة n أكبر أو يساوي 30 والاحتمال p يقارب 0,5 ، أي أن جداء حجم العينة n والاحتمالP أكبر من 15$(n \times P > 15)$، أنظر:

-Wiess: Op. Cit. ,p. 321

ملاحظة: إن تقريب قانون ثنائي الحدين إلى قانون الطبيعي يعني الانتقال من قانون خاص بمتغير عشوائي منفصل إلى قانون خاص بمتغير عشوائي متصل لهذا يجب تصحيح الاستمرارية عند حساب الاحتمالات وذلك بإضافة أو طرح 0,5 حسب الحالات التالية[1]:

$$P(X = a) = P(a - 0.5 \leq X \leq a + 0.5)$$
$$P(X < a) = P(X < a - 0.5)$$
$$P(X \leq a) = P(X < a + 0.5)$$
$$P(X > a) = P(X > a + 0.5)$$
$$P(X \geq a) = P(X \geq a - 0.5)$$
$$P(a < X < b) = P(a + 0.5 < X < b - 0.5)$$
$$P(a \leq X \leq b) = P(a - 0.5 \leq X \leq b + 0.5)$$
$$P(a < X \leq b) = P(a + 0.5 < X \leq b + 0.5)$$
$$P(a \leq X < b) = P(a - 0.5 \leq X < b - 0.5)$$

القانون الأصلي لـX: $X \backsim B(n,p)$

$$P(X = x) = C_n^x P^x q^{n-x}$$
$$E(X) = n.p$$
$$\sigma(X) = \sqrt{n.p.q}$$

– القانون المقرب إليه: $X \backsim B(n,p) \rightarrow X \backsim N(m,\sigma)$

حيث :

$$n \leq 30$$

$$0,3 \leq p \leq 0,7$$

فإن: $X \backsim N(m,\sigma)$

$$m = E(X) = n.p$$

$$\sigma = \sqrt{n.p.q}$$

إذن: $X \backsim N(np, \sqrt{n.p.q})$

مثال (12.3): يفيد آخر تعداد عام للسكان بالجزائر أن 30% من الأسر تملك على الأقل جهاز إعلام آلي. للتأكد من ذلك أجريت دراسة على العينة من 1000 أسرة.

أ- عرف المتغير العشوائي في هذه المسألة.

ب- ما هو القانون الاحتمالي لهذا التوزيع؟ أحسب الأمل الرياضي والتباين والانحراف المعياري.

[1] Ibid., 322.

ت- ما هو احتمال أن يكون عدد الأسر من بين 1000 التي تملك جهاز اعلام آلي: يفوق 400، يقل 150.

الحل:

لدينا:

$P = 30\% \quad n = 100$

أ- X: يمثل عدد السكان الذين يملكون جهاز إعلام آلي في البيت ضمن عينة مكونة من 100 أسرة تختار عشوائيا.

ب- القانون الاحتمالي: $X \in \Omega = [0,1,2,\dots 1000]$

$X \backsim \mathbf{B(1000 - 0,30)}$

$E(X) = np = 100 \times 0{,}3 = 300$ أسرة تملك جهاز

$V(X) = npq = 1000 \times 0{,}3 \times 0{,}70 = 210$

$\sigma\left(\sqrt{V(X)}\right) = \sqrt{210} = 14{,}491 \cong 15$ أسرة

ث- حساب الاحتمالات:

$\mathbf{P(X > 400) = P(X = 401) + \cdots + P(X = 1000)}$

من المستحيل حساب كل هذه الاحتمالات بقانون ثنائي الحدين ولهذا نحاول التقريب:

نلاحظ أن:

$n = 1000$ العينة كبيرة

$P = 0{,}30$ ليس ضعيفا

والقاعدة:

$np > 15(= 100$ من أجل$)$

$np > 100(= 1000$ من أجل$)$

ولدينا: $E(X) = n.p = 300$ محقق ومنه نقرب إلى القانون الطبيعي:

$X \backsim \mathbf{N(m = 300; \sigma(X) = 14,49)}$

نحسب الاحتمالات المطلوبة بواسطة القانون الطبيعي بدلا من قانون ثنائي الحدين كالتالي:

$$P(X = 400) = P(U > \left(\frac{400{,}5 - 300}{14{,}49}\right) = P(U < 10{,}39) = 1 - P(U < 10{,}39) = 1 - 1 = 0$$

$P(X < 150) = 0$

4-2- تقريب قانون بواسون إلى القانون الطبيعي

يمكن تقريب قانون بواسون إلى القانون الطبيعي الذي يسمح لنا بتجاوز أي من هذه المشاكل للقيم الكبيرة لمعلمة توزيع بواسون λ، فهو يعتبر القانون الوحيد الذي يتناسب معه، فلهما نفس التوقع ونفس التباين. نقول

عن متغير عشوائيX الذي يتبع قانون بواسون $P(\lambda)$ أنه يمكن تقريبه إلى قانون الطبيعي $N(m, \sigma)$ في الممارسة العملية عندما تؤول $\boldsymbol{\lambda} \to \infty$،حيث أن لقانون الطبيعي و قانون بواسون يعطيان نتائج متطابقة[1]. عموما يعتبر التقريب من توزيع بواسون إلى التوزيع الطبيعي إذا توفرت الشرط التالي[2]:

– تكون المعلمة $\lambda \geq 15$.

ملاحظة: إن تقريب قانون بواسون إلى قانون الطبيعي يعني الانتقال من قانون خاص بمتغير عشوائي منفصل إلى قانون خاص بمتغير عشوائي متصل لهذا يجب تصحيح الاستمرارية عند حساب الاحتمالات وذلك بإضافة أو طرح $0{,}5$حسب الحالات التالية، بنفس الحالات المطبقة سابقا في التقريب بين قانون ثنائي الحدين والقانون الطبيعي.

القانون الأصلي لـX: $X \backsim \lambda(n, p)$

$$P(X = x) = \frac{e^{-x}\lambda^{x}}{x!}$$
$$E(X) = \lambda$$
$$\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$$

– **القانون المقرب إليه**: $X \backsim P(\lambda) \to X \backsim N(m, \sigma)$

حيث :

$$\lambda \geq 15$$

فإن: $X \backsim N(m, \sigma)$

$$m = \lambda$$

$$\sigma = \sqrt{\lambda}$$

إذن: $X \backsim N(np, \sqrt{\lambda})$

مثال (**14.3**): في مصالح التصليح تصل المكالمات بطريقة عشوائية وبمعدل 5 مكالمات في الساعة.

– ما احتمال أن تصل أكثر من **50** مكالمة خلال ساعات العمل 8؟ يصحح

الحل:

X: يمثل عدد المكالمات الهاتفية التي تصل خلال ساعة.

$X \backsim P(\lambda)$

[1] Chapitre 3 Principales distributions de probabilités

[2] لحسن عبد الله باشيوة [2017]: مرجع سابق، ص 307.

λ : متوسط عدد المكالمات خلال ساعة.

Y: يمثل عدد المكالمات الهاتفية خلال 8 ساعات.

$$Y = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_8$$

حيث أن:

$$x_1 \backsim P(5)$$

$$x_2 \backsim P(5)$$

$$x_3 \backsim P(5)$$

$$Y \backsim P(\textstyle\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i) \qquad 8 \times 5 = 40$$

في المتوسط هناك 40 مكالمة هاتفية تصل خلال 8 ساعات.

$$X \backsim P(40)$$

$$P(X > 50) = \ ?$$

بما أن: $\lambda = 40 > 15$ إذن يمكن تقريب قانون بواسون إلى القانون الطبيعي :

$$Y \backsim P(40) \rightarrow Y \backsim N(m, \sigma)$$

$$m = \lambda = 40$$

$$\sigma(\lambda) = \sqrt{\lambda} = \sqrt{\lambda} = \sqrt{40} = 6{,}32$$

$$P(Y > 50) = P(Y > 50{,}5) = 1 - P(Y \leq 50{,}5) = 1 - P\left(Z \leq \frac{50{,}5 - 40}{6{,}32}\right) = 1 - F(1{,}66)$$
$$= 1 - 0{,}9515$$

$$P(Y > 50) = 0{,}0485 = 4{,}85$$

تمارين محلولة

التمرين الأول:

لمعرفة نسبة الأشخاص اللذين يستخدمون اليد اليسرى أو اليمنى في الكتابة، تمت دراسة على عينتين. عينة من الذكور وحجمها 5 وعينة من الإناث وحجمها 20، حيث بينت الدراسة أن 20% من الأشخاص في كلا العينتين يستخدمون اليد اليسرى.

1- ما هو القانون الاحتمالي لكل متغير مع التعليل؟

2- أوجد التوزيع الاحتمالي لـX.

3- أحسب التوقع الرياضي والانحراف المعياري لـY.

4- أحسب ما يلي:

- احتمال وجود شخصين من الذكور يستخدمان اليد اليسرى للكتابة.
- احتمال وجود على الأكثر 3 ذكور يستخدمون اليد اليسرى للكتابة.
- احتمال وجود شخصين على الأقل من الإناث تستخدمان اليد اليمنى للكتابة.
- احتمال وجود 8 أشخاص على الأكثر من الإناث تستخدم اليد اليمنى للكتابة.
- احتمال وجود 2 و7 أشخاص يستخدمون اليد اليسرى أو اليمنى للكتابة.

الحل:

1- تعريف المتغيرين X وY:

- X: يمثل عدد الذكور الذين يستخدمون اليد اليسرى للكتابة.
- Y: يمثل عدد الإناث اللواتي يستخدمن اليد اليسرى للكتابة.

2- القانون الاحتمالي لكل من X وY هو قانون ثنائي الحدين.

التعليل:

- التجربة لها نتيجتان متنافيتان.
- حجم العينة $n > 1$.
- النتائج مستقلة.

لدينا:

$$n = 50, P_1 = 0{,}2 - n_2 = 20, \qquad P_2 = 0{,}2$$
$$X \backsim B(n, P) \leftrightarrow Y \backsim B(20, 0{,}5)$$

3- التوزيع الاحتمالي لـX:

$$X \backsim B(n, p) \leftrightarrow Y \backsim B(5, 0{,}2)$$
$$P = 0{,}2 \to q = 1 - P = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$$

3-1- تحديد مجال تعريف X:

$$X \in [0,1,2,3,4,5]$$

3-2- حساب الاحتمالات:

- **الطريقة الأولى**: باستخدام صيغة قانون ثنائي الحدين.

$$P(X = xi) = C_n^x . p^x . (q)^{n-x}$$
$$P(X = 0) = C_5^0 (0{,}2)^0 (0{,}8)^5 = \frac{5!}{0!\,5!} \times 1 \times 0{,}3277 = 0{,}3277$$
$$P(X = 1) = C_5^1 (0{,}2)^1 (0{,}8)^1 = \frac{5!}{1!\,5!} \times 0{,}2 \times 0{,}0496 = 0{,}4096$$

$$P(X=2)=C_5^5(0{,}2)^5(0{,}8)^0=\frac{5!}{5!\,5!}\times 0{,}00032\times 1=0{,}00032$$

- الطريقة الثانية: باستخدام جدول ثنائي الحدين، عند:

$$n=5,\qquad p=0{,}2$$
$$P(X=0)=P(X\le 0)=F(0)=0{,}3277$$
$$P(X=1)=P(X\le 1)-P(X\le 0)=F(1)-F(0)=0{,}7373-0{,}3277=0{,}4096$$
$$\vdots$$
$$P(X=5)=(X\le 5)-P(X\le 4)=F(5)-F(4)=1-0{,}9997=0{,}0003$$

ويمكن تلخيص التوزيع الاحتمالي في الجدول التالي:

Xi	0	1	…	5	$\sum$ pi
Pi	0,3277	0,4096	…	30,000	1

- حساب التوقع الرياضي لـY:

$$Y \sim B(20,0{,}2)$$
$$E(Y)=n.p=20\times 0{,}02$$
$$E(Y)=4$$

- حساب الانحراف المعياري:

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{n.p.q}$$
$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{20\times 0{,}2\times 0{,}8}=\sqrt{3{,}2}=1{,}79$$

4- حساب الاحتمالات:

- حساب احتمال وجود شخصين من الذكور يستخدمون اليد اليسرى للكتابة:

$$P(X=2)=P(X\le 2)-P(X\le 1)=F(2)-F(1)=0{,}9421-0{,}7373=0{,}2048$$

- حساب احتمال وجود على الأكثر 3 ذكور يستخدمون اليد اليسرى للكتابة:

$$P(X\le 3)=F(3)=0{,}9933$$

- حساب احتمال وجود شخصين على الأقل من الإناث تستخدمن اليد اليسرى للكتابة:

$$P(X\ge 2)=1-P(Y<2)=1-P(Y\le 1)=1-F(1)=1-0{,}9692=0{,}9308$$

- حساب احتمال وجود 8 أشخاص على الأكثر من الإناث تستخدمن اليد اليمنى للكتابة:
  - Y: يمثل عدد الإناث اللواتي يستخدمن اليد اليسرى للكتابة.
  - $\grave{Y}$: يمثل عدد الإناث اللواتي يستخدمن اليد اليمنى للكتابة.

$$Y \sim B(n,p) \leftrightarrow Y \sim B(20,0{,}2)\quad \grave{Y} \sim B$$

- P: يمثل نسبة الإناث اللواتي يستخدمن اليد اليسرى ويساوي 0,2 إذن:
- $\grave{P}$ يمثل نسبة الإناث اللواتي يستخدمن اليد اليسرى ويساوي:

$$\grave{P}=1-P=1-0{,}2=0{,}8$$
$$\grave{Y} \sim B(20,0{,}8)$$

باستخدام جدول القيم لما تكون: $P=0{,}8$ و$n=20$ نجد أن:

$$P(\grave{Y}\le 8)=F(\grave{Y})=0{,}0001$$

- حساب وجود شخصين يستخدمون اليد اليسرى أو اليمنى للكتابة:

لدينا:

X: عدد الذكور اللذين يستخدمون اليد اليسرى.

$X \backsim B(n_1, p)$

Y: عدد الإناث اللواتي يستخدمن اليد اليسرى.

$Y \backsim B(n_1, p)$

وليكن Z متغير عشوائي يمثل عدد الأشخاص اللذين يستخدمون اليد اليسرى أو اليمنى:

$$Z = X + Y \leftrightarrow Z \backsim B(n_1 + n_2, P)$$
$$Z \backsim B(5, 20, 0{,}2)$$
$$Z \backsim B(25, 0{,}2) \quad p = 0{,}2 \rightarrow q = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$$

فنستخدم قانون ثنائي الحدين (عدم احتواء الجدول على $n = 25$)

$$P(Z = zi) = C_n^{zi} \times P^{zi} \times q^{n-zi}$$
$$P(Z = 2) = C_{25}^{2}(0{,}2)^2(0{,}2)^{23} = \frac{25!}{2!\,23!} = \frac{25 \times 24 \times 23}{2!\,23!} \times 0{,}04 \times 0{,}0053 = 0{,}007708$$
$$\cong 0{,}071$$

التمرين الثاني:

بينت دراسة أن متوسط عدد الأشخاص المصابين بعمى الألوان يقدر بـ 3% ، علما أن هذا المتغير العشوائي يتبع قانون بواسون أحسب ما يلي:

1- عرف المتغير العشوائي X في هذه المسألة.

2- أوجد التوزيع الاحتمالي لـX (3 قيم ، الأولى والثانية والأخيرة).

3- احسب المتوسط الحسابي والانحراف المعياري.

4- أحسب الاحتمالات التالية:

- وجود 5 أشخاص مصابين بعمى الألوان.
- وجود على الأكثر 6 أشخاص مصابين بعمى الألوان.
- وجود ما بين شخصين و5 أشخاص مصابين بعمى الألوان (بما في ذلك 1 و5).
- ما هو أقصى عدد للأشخاص المصابين بعمى الألوان.

الحل:

1- تعريف المتغير العشوائي X: هو عدد الأشخاص المصابين بعمى الألوان.

- متوسط عدد الأشخاص المصابين بعمى الألوان هو: 3.

2- التوزيع الاحتمالي لـX:

$\mathbf{X} \backsim \mathbf{P}(\lambda)$

2-1- من خلال جدول القيم لقانون بواسون عند $\lambda = 3$ نجد:

$\mathbf{X} \sim \mathbf{P}(3) \leftrightarrow \mathbf{X} \in \mathbf{r}_x = [\mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots \mathbf{12}]$

2-2- حساب الاحتمالات:

- **الطريقة الأولى: عن طريق صيغة قانون بواسون:**

$$P(X = xi) = e^{-\lambda} . \frac{\lambda^x}{x!} \; , e = 2,72 \quad , \lambda = 3$$
$$P(X = 0) = \frac{e^{-3} \times 3^0}{0!} = \frac{0,04969 \times 1}{1} = 0,0497$$
$$P(X = 0) = \frac{e^{-3} \times 3^1}{1!} = \frac{0,04969 \times 3}{1} = 0,1491$$

$\vdots$

$$P(X = 12) = \frac{e^{-3} \times 3^{12}}{12!} = \frac{0,04969 \times 531441}{479001600} = 0,000055 \cong 0,0001$$

- **الطريقة الثانية: عن طريق جدول قيم قانون بواسون:**

$$P(X = 0) = P(X \leq 0) = F(0) = 0,0498$$
$$P(X = 1) = P(X \leq 1) = F(1) - F(0) = 0,1991 - 0,0498 = 0,149$$

$\vdots$

$$P(X = 12) = P(X \leq 12) - P(X \leq 11) = F(12) - F(11) = 1 - 0,9999 = 0,0001$$

ويمكن تلخيص التوزيع الاحتمالي ما يلي:

Xi	0	1	…	12	$\sum$ Xi
Pi	0,0498	0,149	…	0,0001	1

3- حساب المتوسط الحسابي والانحراف المعياري:

$$E(X) = \lambda_Y = 3 \text{ أشخاص}$$
$$V(X) = E(X) = 3$$
$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{3} = 1,73$$

4- حساب الاحتمالات:

$$P(X = 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 4) = F(5) - F(4) = 0,9161 - 0,8153 = 0,1008$$
$$P(X \leq 6) = F(6) = 0,9665$$
$$P(1 \leq X \leq 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 1) = P(X \leq 5) - P(X \leq 0) = F(5) - F(0)$$
$$= 0,9161 - 0,0498 = 8663$$

5- حساب أقصى عدد من الأشخاص المصابين بعمى الألوان:

$$X_{\text{شخاص}} \in \Omega = [0,1, \dots 12]$$

إذن: أقصى عدد من الأشخاص المصابين بعمى الألوان هو 12 شخصا.

$$X_{max} = 12$$

التمرين الثالث:

بينت دراسة أن 7% من الأشخاص المسافرين مصابين بدوار البحر، أخذت عينة من 50 شخص مسافرين عبر البحر.

المطلوب:

1- عرف المتغير العشوائي X.

2- ما هو القانون الاحتمالي لـ X مع التعليل.

3- أحسب الأمل الرياضي والتباين، ماذا تلاحظ؟

4- أحسب الاحتمالات التالية:

- وجود 3 أشخاص مصابين بدوار البحر.
- وجود على الأقل 5 أشخاص مصابين بدوار البحر.
- وجود ما بين 2 و7 أشخاص مصابين بدوار البحر(بما في ذلك 2و7).

الحل:

1- تعريف المتغير العشوائي X: هو عدد المسافرين المصابين بدوار البحر.

2- القانون الاحتمالي لـX: هو قانون ثنائي الحدين.

- التعليل: لأن التجربة لها نتيجتان متنافيتان (مصاب غير مصاب).
- حجم العينة $n > 1$.
- التجارب مستقلة.

$X \backsim B(n, P)$

$n = 50 \quad , P = 0{,}07 \rightarrow q = 1 - p \rightarrow q = 1 - 0{,}07 = q = 0{,}93$

$X \backsim B(50, 0{,}07)$

3- حساب الأمل الرياضي والتباين

- **حساب التوقع الرياضي:**

$$E(X) = np = 50 \times 0{,}07 = 3{,}5$$

- **حساب التباين:**

$$V(X) = npq = 50 \times 0{,}07 \times 0{,}93 = 3{,}255$$

- الملاحظة: نلاحظ أن التوقع الرياضي والتباين متساويان تقريبا، وهذا يحدث فقط في قانون بواسون.
- الملاحظ أيضا أن:

$$\left.\begin{array}{r} n = 50 > 30 \\ p = 0{,}07 < 0{,}1 \end{array}\right\}$$

إذن شروط تقريب قانون ثنائي الحدين إل قانون بواسون متوفرة/ وبالتالي نقرب قانون ثنائي الحدين إلى قانون بواسون.

$$X \backsim B(n, p) \leftrightarrow X \backsim B(50, 0{,}07)$$
$$X \backsim P(\lambda), \lambda = np = 50 \times 0{,}07 = 3{,}5$$

$X \rightsquigarrow P(\lambda = 3{,}5)$

حيث (λ): هو متوسط عدد المسافرين المصابين بدوار البحر.

4- حساب الاحتمالات: يتم حساب الاحتمالات باستخدام قانون بواسون بدل ثنائي الحدين لأن شروط التقريب متوفرة.

$$P(X = 3) = P(X \leq 3) - P(X \leq 2) = F(3) - F(2) = 0{,}5366 - 0{,}3208 = 0{,}2158$$
$$P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - F(4) = 1 - 0{,}7254 = 0{,}2746$$
$$P(2 \leq X \leq 7) = P(X \leq 7) - P(X < 2) = P(X \leq 7) - P(X \leq 1) = F(7) - F(1)$$
$$= 0{,}9733 - 0{,}1359 = 0{,}8374$$

التمرين الرابع:

بينت دراسة استقصائية أن عدد المناصرين لنادي رياضي ما، يقدر بـ4 أفراد ضمن 12 فردا، يتم اختيار 5 أشخاص عشوائيا، وليكن X هو متغير عشوائي يمثل عدد المناصرين للنادي الرياضي ضمن العينة المسحوبة.

1- ما هو القانون الاحتمالي لـX مع التعليل؟

2- أوجد التوزيع الاحتمالي لـX؟

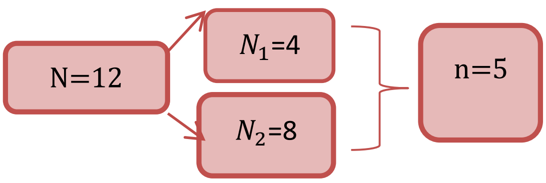
3- أحسب دالة التوزيع الاحتمالية $F(X)$

4- أحسب الأمل الرياضي والانحراف المعياري.

5- أحسب الاحتمالات التالية: $P(X = 1)$، $P(X \geq 2)$، $P(X > 3)$

الحل:

X : عدد المناصرين للنادي الرياضي



1- القانون الاحتمالي لـX: هو قانون فوق الهندسي.

- التعليل: التجربة لها نتيجتان متنافيتان (يناصر / لا يناصر).
- حجم العينة $n > 1$.
- النتائج غير مستقلة (السحب دون ارجاع)، لأنه لا يمكن استجواب نفس الشخص مرتين.

$X \rightsquigarrow H(N, n, p)$

N_1: عدد المناصرين.

N_2: عدد غير المناصرين.

$$N = 12, \quad n = 5, \quad P = \frac{N_1}{N} = \frac{4}{12} = 0{,}33 \;, q = 1 - P = 1 - 0{,}33 = 0{,}67$$

$X \rightsquigarrow H(12, 5, 0{,}33)$

2- التوزيع الاحتمالي لـX:

2-1- مجال تعريف X:

$X \in \Omega = [0,1,2,3,4]$

2-2- حساب الاحتمالات:

$$P(X = xi) = \frac{C_{N_1}^{x}\ C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n}$$

$$P(X = 0) = \frac{C_4^0\ C_8^5}{C_{12}^5} = \frac{56}{792}$$

$$P(X = 1) = \frac{C_4^1\ C_8^4}{C_{12}^5} = \frac{280}{792}$$

$$P(X = 2) = \frac{C_4^2\ C_8^3}{C_{12}^5} = \frac{336}{792}$$

$$P(X = 3) = \frac{C_4^3\ C_8^2}{C_{12}^5} = \frac{112}{792}$$

$$P(X = 4) = \frac{C_4^4\ C_8^1}{C_{10}^5} = \frac{8}{792}$$

ويمكن تلخيص ذلك كالتالي:

X	0	1	2	3	4	$\sum$ Pi
$P(X = x)$	$\frac{56}{792}$	$\frac{280}{792}$	$\frac{336}{792}$	$\frac{112}{792}$	$\frac{8}{792}$	1
$F(X)$	$\frac{56}{792}$	$\frac{336}{792}$	$\frac{672}{792}$	$\frac{784}{792}$	1	/

3- أحسب دالة التوزيع الاحتمالية F(X)

$$f(X) = P(X \leq xi) = \sum_{i=8}^{k} Pi$$

$$F(0) = P(X \leq 0) = \frac{56}{792}$$

$$F(1) = P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{56}{792} + \frac{280}{792} = \frac{336}{792}$$

$$F(2) = P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{336}{792} + \frac{336}{792} += \frac{672}{792}$$

$$F(3) = P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{672}{792} + \frac{112}{792} = \frac{784}{792}$$

$$F(1) = P(X \leq 4) == \frac{784}{792} + \frac{8}{792} = \frac{792}{792} = 1$$

4- حساب التوقع الرياضي والانحراف المعياري :

- حساب التوقع الرياضي:

$$E(X) = n.p = 5 \times 0{,}33 = 1{,}65 \cong 2$$

$$V(X) = n.p.q\left(\frac{N - n}{N - 1}\right) = 5 \times 0{,}33 \times 0{,}67 \times \frac{12 - 5}{12 - 1} = 5 \times 0{,}33 \times 0{,}67 \times \frac{7}{11} = 0{,}70$$

- حساب الانحراف المعياري:

$$\sigma(X) = \sqrt{n.p.q\left(\frac{N - n}{N - 1}\right)} = \sqrt{0{,}70} = 0{,}84$$

- حساب الاحتمالات:

$$P(X=1)=\frac{280}{792}$$
$$P(X\geq 2)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=$$

أو:

$$P(X\geq 2)=1-P(X\leq 2)=1-P(X\leq 1)=1-F(X\leq 1)=1-F(1)=1-\frac{336}{792}=$$
$$P(X>3)=1-P(X\leq 3)=1-F(X\leq 1)=1-F(3)=1-\frac{789}{792}=\frac{8}{792}$$

أو:

$$P(X>3)=P(X=4)=\frac{8}{792}$$

التمرين الخامس:

أشارت دراسة احصائية حول تأييد هجرة الأدمغة للخارج أنه ضمن 100 شخص يوجد هناك 45 شخص يؤيد هجرة الأدمغة و55 يعارضها، يتم سحب عينة من 3 أشخاص وليكن X متغير عشوائي يمثل عدد المؤيدين للهجرة ضمن العينة.

1- ما هو القانون الاحتمالي الأصلي لـX.

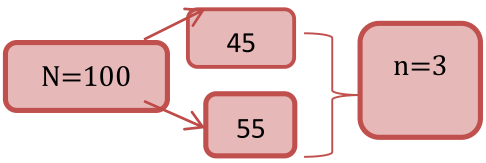
2- ما هو القانون الاحتمالي الذي يمكن أن نقرب إليه؟

3- أوجد التوزيع الاحتمالي لـX.

4- أحسب الأمل الرياضي والانحراف المعياري لـ X.

الحل:

X : عدد الأشخاص المؤيدين للهجرة



- القانون الاحتمالي الأصلي لـX:هو القانون فوق الهندسي لأنه من الضروري اختيار الأعضاء دون الارجاع (عضوين مختلفين)، $X \sim H(N,n,p)$

- نلاحظ أن حجم العينة $n=2$ يبدو صغيرا مقارنة بحجم المجتمع $N=100$ و $\frac{n}{N}<5\%$ وعليه نقرب إلى قانون ثنائي الحدين $X \sim B(n,p)$ لأن شرط التقريب قانون فوق الهندسي إليه متوفر.

- التوزيع الاحتمالي:

-

لدينا: $n=3 \quad , \quad P=\frac{45}{100}=0{,}45$

$X \backsim H(100, 2, 0{,}45) \rightarrow X \backsim B(2, 0{,}45)$

$P(X=1) = \frac{C_{45}^{1}.C_{55}^{1}}{C_{100}^{2}} = \frac{45 \times 53}{4950} = 0{,}0002 \cong 0{,}50$

$P(X=1) = C_{n}^{x}.P^{x}q^{n-x} \quad , \quad P = 0{,}47 \rightarrow q = 0{,}53$

$P(X=0) = C_{2}^{0}.(0{,}47)^{0}.(0{,}53)^{2} = 1 \times 1 \times 0{,}53^{2} = 0{,}2809$

$P(X=1) = C_{2}^{1}.(0{,}47)^{1}.(0{,}53)^{1} = 2 \times 0{,}47 \times 0{,}53 = 0{,}4982$

$P(X=2) = C_{2}^{2}.(0{,}47)^{2}.(0{,}53)^{0} = 1 \times 0{,}47^{2} \times 1 = 0{,}2209$

ويمكن تلخيص ذلك كالتالي:

X	0	1	2	$\sum Pi$
$P(X=x)$	0,2809	0,4982	0,2209	1

- حساب التوقع الرياضي والانحراف المعياري:

$X \backsim H(100, 2, 0{,}45) \rightarrow X \backsim B(2, 0{,}45)$

$E(X) = n.p = 2 \times 0{,}45$

$V(X) = n.p.q\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = 2 \times (0{,}47)(0{,}53).\frac{47-2}{47-1} =$

$E(X) = n.p = 2 \times 0{,}47$

$V(X) = n.p.q = 2 \times 0{,}47 \times 0{,}53 = 0{,}4982$

$\sigma(X) = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{0{,}4982} = 0.70$

التمرين السابع:

إذا كان معدل انقطاع الكهرباء عن مدينة "غزة" هو 16 مرة في الشهر، وإذا كان X متغير عشوائي يمثل عدد المرات التي ينقطع فيها التيار الكهربائي عن المدينة.

1-ما هو القانون الاحتمالي الأصلي لـX مع التعليل؟

2-أحسب الأمل الرياضي والانحراف المعياري.

3-ما هو القانون الاحتمالي الذي يمكن أن نقرب إليه مع التعليل؟

4-أحسب احتمال أن تكون عدد مرات التي ينقطع فيها الكهرباء على المدينة خلال أسبوع:

- ما بين 2 و5 مرات (بما في ذلك 2 و5).
- أكبر أو يساوي 7 مرات.
- أقل تماما من 8 مرات.

الحل:

1-القانون الاحتمالي لـX : هو قانون بواسون.

- التعليل: لأن متوسط عدد مرات انقطاع الكهرباء مرتبط بالمكان والزمان(متوسط انقطاع الكهرباء في مدينو غزة خلال أسبوع يقدر بـ3، إذن X يتبع قانون بواسون
- و $\lambda = 16$ تساوي متوسط انقطاع الكهرباء على مدينة غزة خلال أسبوع.

2-حساب الأمل الرياضي والانحراف المعياري:

$E(X) = \lambda = 16$ مرات
$V(X) = \lambda = 16$
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{16} = \mathbf{4}$

3-القانون الاحتمالي الذي يمكن أن نقرب إليه هو القانون الطبيعي.

- التعليل: لأننا نلاحظ أن متوسط عدد مرات انقطاع الكهرباء $(\boldsymbol{\lambda} = 16)$ يفوق 15، إذن شروط تقريب قانون بواسون إلى الطبيعي محققة.

$\lambda = 16 > 15$
$X \backsim P(\lambda) \to X \backsim N(m, \sigma)$

- حيث أن حساب معالم القانون الطبيعي تتمثل في:

$m = E(X) = \lambda = 16$
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{16} = 4$

4-حساب الاحتمالات:

بما أنه تم الانتقال من قانون بواسون وهو قانون خاص بالمتغير المنفصل إلى القانون الطبيعي وقانون خاص بالمتغير المتصل، فإنه يجب تصحيح الاستمرارية قبل حساب الاحتمالات.

$$P(X = 5) = P(5 - 0,5 \leq X \leq 5 + 0,5) = P(4,5 \leq 5,5) = \left(\frac{4,5 - 16}{4} \leq \frac{X - m}{\sigma} \leq \frac{5,5 - 16}{4}\right)$$
$$= P(-2,88 \leq Z \leq -2,63) - P(Z \leq -2,63) - P(Z \leq -2,88)$$
$$= [1 - P(Z \leq -2,88) - 1 - P(Z \leq -2,63)] = 0,9957 + 0,9980 - 0,9980 - 0,9957$$
$$= 0,0023$$

$$P(2 \leq X \leq= 5) = P(2 - 0,5 \leq X \leq 5 + 0,5) = P(1,5 \leq 4,5)$$
$$= \left(\frac{1,5 - 16}{4} \leq \frac{X - m}{\sigma} \leq \frac{4,5 - 16}{4}\right) = P(Z \leq -2,88) - P(Z \leq -3,63)$$
$$= P(-3,63 \leq Z \leq -2,88) = [1 - P(Z \leq -2,88)] - [1 - P(Z \leq -3,63)]$$
$$= 0,9957 + 0,9980 - 0,9980 - 0,9957 = 0,0023$$

$$P(5 \leq X \leq 7) = P(5 - 0,5 \leq X \leq 7 - 0,5) = P(4,5 \leq X \leq 6,5)$$
$$= P\left(\frac{4,5 - 16}{4} \leq \frac{X - m}{\sigma} \leq \frac{6,5 - 16}{4}\right) = P(-2,88 \leq Z \leq 2,38)$$
$$= (Z \leq -2,38) - P(Z \leq -2,88)$$
$$= [1 - P(Z \leq -2,38)] - [1 - P(Z \leq -2,88)]$$
$$= P(Z \leq 2,88) - P(Z \leq 2,38) = 0,9980 + 0,9913 = 0,0067$$

أكبر أو يساوي 7:

$$P(X \geq 7) = P(X \geq 7 + 0,5) = P(X \geq 6,5) = \left(\frac{X - m}{\sigma} \geq \frac{6,5 - 16}{4}\right) = P(Z \geq -2,38)$$
$$= 1 - P(Z \leq -2,38) = 1 - [1 - P(Z \leq -2,38)] = [1 - P(Z \leq 2,38)]$$
$$= P(Z \leq 2,38) = 0,9913$$

أكبر من 8:

$$P(X < 8) = P(X < 7 - 0,5) = P(X < 7,5) = P\left(Z < \frac{7,5 - 16}{4}\right)$$
$$= P(Z < -2,13) = 1 - P(Z < 2,13) = 1 - 0,9834 = 0,0166$$

التمرين الثامن:

بافتراض أن المتغير العشوائي X يمثل عدد مرات الحصول على عدد زوجي عند رمي زهرة نرد مئة (100) مرة.

1– ما هو القانون الاحتمالي الأصلي للمتغير العشوائي X مع التعليل؟

2- أحسب الأمل الرياضي والانحراف المعياري؟

3– ما هو القانون الاحتمالي الذي يمكن أن نقرب إليه مع التعليل؟

4– أحسب احتمال أن يكون عدد مرات ظهور صورة عند رمي زهرة النرد:

- أقل من 50 مرة.
- أكثر من 75 مرة.
- محصور بين 50 و 85 مرة (بما في ذلك 50 و85).

الحل:

1–القانون الاحتمالي الأصلي لـX : هو قانون ثنائي الحدين.

– التعليل: لأن التجربة لها نتيجتان متنافيتان (نحصل على عدد زوجي/ لا نحصل على عدد زوجي).

– حجم العينة $n < 1$.

– التجارب مستقلة لأنه لم يتم الإشارة لنوع السحب سواء مع الارجاع أو دون الإرجاع، وبما أنحجم المجتمع مجهول فهذا يعني أنه كبير جدا، وبالتالي فإن السحب مع الارجاع ودون ارجاع يعطي نفس النتيجة وبهذا تم افتراض أن السحب مع الارجاع وأن التجارب مستقلة. فإذن القانون الاحتمالي لـ X هو ثنائي الحدين.

$$X \backsim B(n, P)$$
$$n = 100 \quad , p + 0{,}6 \ \rightarrow q = 1 - p = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$$
$$X \backsim B\ (100, 6)$$

2– حساب الأمل الرياضي والانحراف المعياري:

$$\begin{cases} E(X) = np = 100 \times \dfrac{1}{2} = 50 \\ V(X) = npq = 100 \times \dfrac{1}{2} \times = 25 \\ \sigma(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{25} = 5 \end{cases}$$

3– القانون الاحتمالي:

4–أنه تم الانتقال من قانون ثنائي الحدين وهو قانون خاص بالمتغير المنفصل إلى القانون الطبيعي وقانون خاص بالمتغير المتصل، فإنه يجب تصحيح الاستمرارية قبل حساب الاحتمالات.

– أقل من 50:

$$P(X < 50) = P(X < 50 - 0{,}5) = P(X < 49{,}5) = P\left(\frac{X - m}{\sigma} < \frac{49{,}5 - 50}{5}\right) = P(Z < 0{,}1)$$
$$= 1 - P(Z < 0{,}1) = 1 - 0{,}5398 = 0{,}4602$$

- أكبر من 75:

$$P(X>75)=P(X>75+0{,}5)=P(X>75{,}5)=P\left(Z>\frac{75{,}5-50}{5}\right)=P(Z>5{,}1)$$
$$=1-P(Z\leq 5{,}1)=1-1=0$$

- محصور بين 25 و 75:

$$P(25<X\leq 75)=P(25+0{,}5<X\leq 75+0{,}5)=P(25{,}5<X<75{,}5)$$
$$=P(-4{,}9<Z)=P(Z<5{,}1)=[1-P(Z\leq -4{,}9)]$$
$$=P(Z\leq 5{,}1)-1+P(Z\leq 4{,}9)=1-1+1=1$$

- محصور بين 50 و 85:

$$(50\leq X\leq 85)=P(50-0{,}5<X\leq 85+0{,}5)=P(49{,}5\leq X\leq 85{,}5)$$
$$=P\left(\frac{49{,}5-50}{5}\leq\frac{X-m}{\sigma}\leq\frac{85{,}5-50}{5}\right)=P(-0{,}1\leq Z<7{,}1)$$
$$=P(Z\leq 7{,}1)-P(Z\leq -0{,}1)=[1-P(Z\leq 0{,}1)]$$
$$=P(Z\leq 7{,}1)-1+P(Z\leq 0{,}1)=1-1+0{,}5398=0{,}5398$$

التمرين التاسع:

تفيد الإحصائيات الطبية في الجزائر أن2,60% من النساء يكون مستوى الهيموبغلوبين لديهم في الدم يقل عن 13,5 غ/دل وأن نسبة 1,70% منهم يكون مستوى الهيموغلوبين لديهم يفوق 17,5 غ/دل. وكذلك أظهر تحليل البيانات أن هذا المتغير العشوائي يتوزع توزيعا طبيعيا.

1-أحسب المتوسط الحسابي m و الانحراف المعياري σ(X).

2-أحسب الربيع الثالث واشرح النتيجة.

3-استنتج الربيع الأول من نتيجة الربيع الثالث واشرح النتيجة.

4-أحسب نسبة النساء اللواتي:

- يفوق مستوى الهيموغلوبين لديهن 12,5 غ/دل.
- يترواح مستوى الهيموغلوبين لديهن ما بين 12,5 غ/دل و 16 غ/دل.
- يقل مستوى الهيموغلوبين لديهن عن 11,7 غ/دل.

الحل:

X: يمثل مستوى الهيموغلوبين في الدم لدى النساء.
$X \backsim N(m,\sigma)$

1- أحسب المتوسط الحسابي m و الانحراف المعياري σ(X).

لدينا:

$$P(X<13{,}5)=0{,}026\rightarrow P\left(Z<\frac{13{,}5-m}{\sigma}\right)=0{,}026 \quad 1$$

$$P(X > 17{,}5) = 0{,}0170 \leftrightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{17{,}5 - m}{\sigma}\right) \leftrightarrow = 0{,}0170P\left(Z \leq \frac{17{,}5 - m}{\sigma}\right)$$
$$= 1 - 0{,}0170 = 0{,}983 \qquad 2$$
$$PZ\left(Z < \frac{13{,}5 - m}{\sigma}\right) = 0{,}026 \qquad 1$$
$$P(Z\left(Z < \frac{17{,}5 - m}{\sigma}\right) = 0{,}983 \qquad 2$$

ومن الجدول الطبيعي رقم 2 (ملحق رقم ...):

- عند الاحتمال 0,026 نجد Z (سالبة لأن$P < 0{,}5$) :

$$Z = -1{,}9431 \leftrightarrow Z = \frac{13{,}5 - m}{\sigma} = -1{,}9431 \qquad 1$$

- عند الاحتمال 0,983 نجد Z (موجبة لأن$P > 0{,}5$) :

$$Z = \frac{17{,}5 - m}{\sigma} = 2{,}1201 \qquad 2$$
$$\begin{cases} = \dfrac{13{,}5 - m}{\sigma} = 1{,}9431 & 1 \\ = \dfrac{17{,}5 - m}{\sigma} = 2{,}1201 & 2 \end{cases}$$

بحل المعادلتين 1 و2 نجد:

$$m = 15{,}40 \quad , \sigma = 0{,}98$$
$$X \sim N(15{,}40\,, 0{,}98)$$

2-حساب الربيع الأول:

$$P(X < Q_3) = 0{,}75$$
$$P\left(Z < \frac{Q_3 - m}{\sigma}\right) = 0{,}75$$
$$P\left(Z < \frac{Q_3 - 15{,}40}{0{,}98}\right) = 0{,}75$$

من الجدول رقم 2 للقانون الطبيعي (الملحق رقم....)

- عند الاحتمال 0,75 نجد Z:

$$\frac{Q_3 - 15{,}40}{0{,}98} = 0{,}6745$$
$$Q_3 - 15{,}40 = 0{,}98 \times 0{,}6745$$
$$Q_3 = (0{,}98 \times 0{,}6745) + 14{,}40$$
$$Q_3 = 0{,}66 + 15{,}60 = 16{,}06$$
$$Q_3 = 16{,}06$$

- الشرح: 75% من النساء يكون مستوى الهيموغلوبين لديهن أقل من 16,06 غ/دل.

3- استنتاج Q_1 من الربيع الأول وشرح النتيجة:

$$m - (Q_3 - m) = Q_1$$
$$15{,}40 - (16{,}06 - 15{,}40) = Q_1 = 16{,}06 - 15{,}40 = 0{,}66$$

5-حساب نسبة النساء اللواتي:

- يفوق مستوى الهيموغلوبين لديهن 12,5 غ/دل.

$$P(X>12{,}5) \leftrightarrow P\left(Z>\frac{12{,}5-15{,}40}{0{,}98}\right)=P(Z>-2{,}96)=1-P(Z<-2{,}96)$$
$$=1-[1-P(Z<2{,}96)]=1-1+P(Z<2{,}96)=0{,}9985$$

- يترواح مستوى الهيموغلوبين لديهن ما بين 12,5 غ/دل و 16 غ/دل.

$$P(12{,}5<X<16)=P(Z>-2{,}96)=1-P(-2{,}96<Z<0{,}61)$$
$$=P(Z<0{,}61)-P(Z<-2{,}96)=P(Z<0{,}61)-1+P(Z<2{,}96)$$
$$=0{,}7291-1+0{,}9985=0{,}7276$$

- يقل مستوى الهيموغلوبين لديهن عن 11,7 غ/دل.

$$P(X<16)=P\left(Z<\frac{16-15{,}40}{0{,}98}\right)=P(Z<0{,}61)=0{,}7291$$

تمرين مقترح: ثنائي حدين للطبيعي

بفرض أن 60% من العائلات تقوم بتسديد فواتير الكهرباء والغاز في الوقت المحدد، أجريت دراسة على عينة 100 أسرة، وليكن المتغير العشوائي X يمثل عدد الأسر التي تقوم بتسديد الفواتير في الوقت المحدد.

1- ما هو القانون الاحتمالي الأصلي لـX مع التعليل.

2- أحسب الأمل الرياضي والإنحراف.

3- القانون الاحتمالي الذي يمكن التقريب إليه؟ مع التعليل

4- حساب الاحتمالات التالية:

الحل:

1- القانون الاحتمالي لـX مع التعليل:

- X: يمثل عدد الأسر التي تسدد فواتير الكهرباء والغاز في الوقت المحدد.
- القانون الاحتمالي لـX هو ثنائي الحدين.

5-القانون الاحتمالي الأصلي لـX : هو قانون ثنائي الحدين.

- التعليل: لأن التجربة لها نتيجتان متنافيتان (تسدد/ لا تسدد).
- حجم العينة $n<1$.
- التجارب مستقلة لأنه لم يتم الإشارة لنوع السحب سواء مع الارجاع أو دون الإرجاع، وبما أنحجم المجتمع مجهول فهذا يعني أنه كبير جدا، وبالتالي فإن السحب مع الارجاع ودون ارجاع يعطي نفس النتيجة وبهذا تم افتراض أن السحب مع الارجاع وأن التجارب مستقلة. فإذن القانون الاحتمالي لـ X هو ثنائي الحدين.

$$X \rightsquigarrow B(n,P)$$
$$n=100 \quad ,p+0{,}6 \;\rightarrow q=1-p=1-0{,}6=0{,}4$$
$$X \rightsquigarrow B\,(100,6)$$

2-حساب الأمل الرياضي والانحراف المعياري:

$$E(X)=np=100\times 0{,}6=60$$
$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{npq}=\sqrt{100\times 0{,}6\times 0{,}4}=\sqrt{24}$$

$\sigma(X) = 4,9$

نماذج

امتحانات

سـابقة

جامعة فرحات عباس– سطيف1–

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

السنة الأولى LMD **امتحان في مقياس الإحصاء2 (23 ماي 2015)** **المدة:ساعة ونصف**

الأقسام: 01،02،03،04

التمرين الأول:(07 نقاط)

ليكن X متغير عشوائي يمثل العمر بالسنوات لركاب طائرة ما.دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير معرفة كما يلي:

$f(x) = \frac{-1}{36000}\,(x^2 - 60x)$، أقصى عمر هو 60 سنة $(X \in \Omega = [0 - 60])$.

1– أثبت أن f(x) دالة كثافة احتمالية؟

2– أحسب دالة التوزيع الاحتمالية F(X) ؟

3– أحسب التوقع الرياضي والانحراف المعياري ، علما أن: $m_2 = 1080$ ؟

4– نختار عشوائيا مسافرا من ركاب الطائرة، أحسب احتمال أن:

أ– يفوق عمره 20 سنة؟ **ب –** يقل عمره عن 40 سنة؟ **ج–** عمره محصورا ما بين 10 سنوات و40 سنة؟

التمرين الثاني:(07 نقاط)

يدخل في المتوسط 05 زبائن خلال ساعة من الزمن إلى أحد المطاعم،إذا علمت أن المتغير العشوائي في هذه المسألة يتبع قانون Poisson.

1– عرف المتغير العشوائي في هذه المسألة؟

2– ما هي الصيغة الرياضية لقانون حساب الاحتمالات؟

3– ما هو أقصى عدد ممكن للزبائن خلال ساعة من الزمن؟

4– عين التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير (أعرض فقط القيم:الأولى والثانية، وما قبل الأخيرة والأخيرة) ؟

5– أحسب الأمل الرياضي والانحراف المعياري؟

6– أحسب احتمال أن يكون عدد الزبائن: **أ–** يفوق 10؟ **ب –** أقل أو يساوي 5؟

التمرين الثالث:(06 نقاط)

ليكن X متغير عشوائي يمثل الطول بالسنتيمتر لركاب طائرة ما، والذي يتبع القانون الطبيعي بمتوسط قدره 170 سم وانحراف معياري قيمته 10سم.

1– أحسب احتمال أن يكون طول راكب ما يقل عن 165 سم؟

2– أحسب احتمال أن يكون طول راكب ما محصورا ما بين 165 سم و175 سم؟

3– أحسب المنوال والوسيط مع شرح النتيجتين؟

4– أحسب : **أ–** الربيع الأول **ب –** العشير الثالث؟

جامعة فرحات عباس– سطيف1–

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

السنة الأولى LMD **امتحان في مقياس الإحصاء2 (23 ماي 2015)** **المدة:ساعة ونصف**

الأقسام: 12،11،10،09

التمرين الأول:(07 نقاط)

التوزيع الاحتمالي لعدد زبائن فندق ما موضح في الجدول التالي:

X	100	110	118	120	125	$\Sigma P(X = x_i)$
$P(X = x_i)$	0,2	0,3	0,2	0,2	0,1	1

1– مثل بيانيا هذا التوزيع؟

2– أحسب دالة التوزيع الاحتمالية $F(X)$ ؟

3– أحسب $E(X)$، $\sigma(X)$؟

4– أحسب احتمال أن يكون عدد زبائن الفندق:

أ– يفوق 100؟ **ب** – محصورا ما بين 100 و125 (بما في ذلك 100) ؟

التمرين الثاني:(07 نقاط)

أردنا إجراء مقابلة مع ثلاثة أفراد من طاقم طائرة يضم 10 أفراد منهم 6 نساء،يتم اختيارهم بطريقة عشوائية.

نعرف في هذه المسألة المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد النساء ضمن العينة المسحوبة.

1– ما هو القانون الاحتمالي لـ X مع التعليل؟

2– عين التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير؟

3– أحسب الأمل الرياضي والانحراف المعياري؟

4– أحسب احتمال أن يكون ضمن العينة: **أ**– إمرأة واحدة؟ **ب** – أقل من إمرأتان؟

التمرين الثالث:(06 نقاط)

تفيد نتائج دراسة إحصائية أن مستوى الهيموغلوبين في الدم لمجتمع بشري يتوزع طبيعيا بمتوسط حسابي يقدر ب: 16 وانحراف معياري قدره 0,9 ، نختار عشوائيا فردا من هذا المجتمع.

1– أحسب احتمال أن يكون مستوى الهيموغلوبين لديه أكبر من 14؟

2– أحسب احتمال أن يكون مستوى الهيموغلوبين لديه محصورا ما بين 17 و18؟

3– أحسب المنوال والوسيط مع شرح النتيجتين؟

4– أحسب: **أ**– الربيع الثالث **ب** – المئوي 30؟

جامعة فرحات عباس– سطيف1–

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

السنة الأولى LMD | **امتحان في مقياس الإحصاء2 (22 ماي 2016)** | **المدة:ساعة ونصف**

الأقسام: 12،11،10،09

التمرين الأول:(07 نقاط)

ثلاث ولايات: A،B، C من الجنوب الجزائري تشارك على التوالي بإنتاج سنوي من التمور قدره: 400 طن،450 طن، 150 طن من بين إنتاج وطني قدره 1000 طن، تشير الإحصائيات الزراعية للسنوات الماضية أن نسبة الإنتاج الرديء في هذه الولايات هو على التوالي: 10%،8 %،5 %، نختار عشوائيا صندوقا من التمر:

1– ترجم هذه المسألة إلى شجرة احتمالية؟

2– ما هو احتمال أن يكون هذا الصندوق من إنتاج الولاية A ؟ الولاية B ؟ الولاية C؟

3– إذا علمت أن هذا الصندوق من إنتاج الولاية B، فما هو احتمال أن يكون من النوع الرديء؟

4– ما هو احتمال أن يكون هذا الصندوق: **أ**– من النوع الرديء؟ **ب** – من النوع الجيد؟

5– إذا علمت أن هذا الصندوق من النوع الرديء، ما هو احتمال أن يكون من إنتاج الولاية A؟الولاية B؟الولاية C؟

التمرين الثاني:(07 نقاط)

في مصلحة الاستعجالات الطبية بأحد المستشفيات،يقدر متوسط عدد المرضى الذين يدخلون للمصلحة ب 5 مرضى خلال نصف ساعة، علما أن التوزيع يتبع قانون بواسون.

1– أحسب احتمال أن يتم خلال نصف ساعة دخول:

أ– ولا مريض؟ **ب** – مريضين؟ **ج**– على الأكثر ثلاث مرضى؟

2– أحسب التوقع الرياضي والانحراف المعياري؟

3– ما هو أقصى عدد ممكن للمرضى الذين يدخلون للمصلحة ؟

4– أحسب احتمال أن يتم خلال ربع ساعة دخول:

أ– على الأقل ثلاث مرضى؟ **ب** – يتراوح ما بين 2 وأقل من أو يساوي 5 مرضى؟

التمرين الثالث:(06 نقاط)

أثبتت دراسة إحصائية أن درجات اختبار الذكاء لمتطوعي الجيش تتوزع طبيعيا بمتوسط حسابي يقدر ب: 110 وانحراف معياري قدره 10.

1– ما هي الصيغة الرياضية لدالة الكثافة الاحتمالية؟

2– أحسب احتمال أن تكون درجة الذكاء لأحد المتطوعين: **أ**– تقل عن 120؟ **ب** – تتراوح ما بين 105 و115؟

3– أحسب المنوال والوسيط مع شرح النتيجتين؟ **4**– أحسب قيمتي الربيع الأول والمئوي 66؟

جامعة فرحات عباس– سطيف1–

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

السنة الأولى LMD **امتحان في مقياس الإحصاء2 (17 ماي 2017)** **المدة:ساعة ونصف**

التمرين الأول:(07 نقاط)

مركز جامعي يضم ثلاث معاهد C،B،A يتوزع العدد الإجمالي للطلبة على المعاهد الثلاثة حسب النسب التالية على الترتيب:10 %،40 %،50 %. أثبت دراسات سابقة أن نسبة الرسوب (الحدث M) في المعاهد السابقة هي على الترتيب: 15%،25 %،30 %.سحبنا عشوائيا طالبا من المركز الجامعي.

1– ترجم هذه المسألة إلى شجرة احتمالية؟

2– ما هو احتمال أن يكون هذا الطالب: **أ**– من المعهد A ؟ **ب** – من المعهد B أوC؟

3– إذا علمت أن هذا الطالب من المعهد C ، فما هو احتمال أن يكون راسبا؟

4– ما هو احتمال أن يكون هذا الطالب: **أ**– راسبا ؟ **ب** – ناجحا؟

5– إذا علمت أن هذا الطالب الذي تم سحبه تبين أنه راسب، فما هو احتمال أن يكون من:

أ– من المعهد A ؟ **ب** – من المعهد B ؟ **ج** – من المعهد C ؟

التمرين الثاني:(07 نقاط)

ليكن X متغير عشوائي يمثل عدد الرجال ضمن وفد معين مشكل من 4 أشخاص،يتبع التوزيع المبين في الجدول التالي:

1– ما نوع هذا المتغير العشوائي؟

X	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	a	3a	3a	2a	a

2. أ– أوجد قيمة a حتى يكون هذا التوزيع فعلا توزيعا احتماليا؟ **ب**– مثل بيانيا هذا التوزيع الاحتمالي؟

3.لنفترض أن a تساوي $\frac{1}{10}$ ، أ– أوجد دالة التوزيع الاحتمالية F(x)؟ **ب**– مثلها بيانيا؟

4. أحسب: أ– الأمل الرياضي ؟ **ب**– الانحراف المعياري؟

5. أحسب احتمال أن يكون عدد الرجال ضمن الوفد الواحد:

أ– أقل من 3؟ **ب**– أكبر من 5؟ **ج**– أكبر من1 وأقل من 4؟

التمرين الثالث:(06 نقاط)

تفيد نتائج دراسة إحصائية قام بها مالك إحدى القاعات الرياضية حول أوزان الأشخاص مرتادي هذه القاعة، أن متوسط الوزن يقدر ب 71 كلغ،في حين الانحراف المعياري بلغ 5,8 كلغ .لنفترض أن الوزن يتوزع طبيعيا.

1– أعط الصيغة الرياضية لدالة الكثافة الاحتمالية لكل من القانون الطبيعي والقانون الطبيعي المعياري؟

2– أحسب احتمال أن يكون وزن شخص ما:

أ– أقل من 60 كلغ؟ **ب** – يفوق 80 كلغ؟ **ج** – يتراوح ما بين 65 كلغ و83 كلغ؟

3– أحسب قيمتي الربيع الأول والمئوي 73 مع شرح النتيجتين؟

جامعة فرحات عباس- سطيف1-

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

السنة الأولى LMD **امتحان في مقياس الإحصاء2 (25 ماي 2018)** **المدة:ساعة ونصف**

الأقسام: من 1 إلى 6

التمرين الأول:(06 نقاط)

تتنافس ثلاث ولايات على تنظيم منافسة رياضية، تقدر حظوظ اختيار كل منها ب:50%،30%،20% على الترتيب.

ترشحت إحدى القنوات التلفزيونية لشراء حقوق البث التلفزي لهذه المنافسة،حظوظ الحصول على الصفقة مرتبطة بالولاية التي ستحصل على شرف تنظيم المنافسة، حيث أن احتمال الحصول على الصفقة هو 0,7 في حالة تعيين الولاية A، و0,5 في حالة تعيين الولاية B، و0,3 في حالة تعيين الولاية C.

1- ترجم معطيات هذه المسألة إلى شجرة احتمالية؟

2- أحسب احتمال: **أ-** حصول الولاية A على شرف تنظيم المنافسة؟ **ب -** حصول الولاية B على شرف تنظيم المنافسة وفوز القناة التلفزيونية بالصفقة ؟

3- أحسب احتمال حصول القناة التلفزيونية على الصفقة ؟

4- إذا علمت أن القناة التلفزيونية حصلت فعلا على الصفقة، فما هو احتمال أن يكون شرف تنظيم المنافسة قد فازت به: **أ-** الولاية A ؟ **ب -** الولاية B ؟

التمرين الثاني:(06 نقاط)

التوزيع الموالي يوضح عدد المرضى في مصلحة الاستعجالات أسبوعيا في إحدى المستشفيات.

1- أثبت أن التوزيع فعلا هو توزيعا احتماليا؟

X	40	55	67	90	100
$P(X = x_i)$	0,2	0,3	0,2	0,2	0,1

2- أحسب دالة التوزيع الاحتمالية $F(X)$ ثم مثلها بيانيا ؟ **3-** أحسب كلا من $E(X)$ و $\sigma(X)$؟

4- أحسب احتمال أن يكون عدد المرضى:**أ-**يفوق67 مريضا؟**ب-** محصور بين 55 و90 مريضا(بما في ذلك 90)؟

التمرين الثالث:(08 نقاط)

ليكن المتغير العشوائي يمثل وزن أكياس الإسمنت من طرف أحد المصانع، علما أن هذا المتغير يتبع القانون الطبيعي بمتوسط قدره: 50 كلغ، وانحراف معياري قدره: 0,8كلغ.

1- أحسب نسبة الأكياس التي يتجاوز وزنها 51,3كلغ؟

2- أحسب نسبة الأكياس التي يتراوح وزنها ما بين 49,8كلغ و 52,12كلغ؟

3- أحسب كلا من المنوال والوسيط مع شرح النتيجتين؟

4- لتكن العبارتين التاليتين: $P(X < \alpha) = 0{,}75$ و$P(X > \beta) = 0{,}35$

- أحسب قيمتي α و β المحققتين للعبارتين السابقتين ؟، ثم اشرح معناهما ؟

جامعة فرحات عباس- سطيف1-

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

السنة الأولى LMD **امتحان في مقياس الإحصاء2 (12 سبتمبر 2019)** **المدة:ساعة ونصف**

التمرين الأول:(06 نقاط)

1- إذا كان A وB حدثان متنافيان ومتكاملان بالنسبة لمجموعة الأساس حيث: $P(A)=\frac{3}{8}$، $P(B/A)=\frac{2}{3}$

أ- ماذا تمثل العبارة $P(B/A)$ ؟

ب- أحسب $P(A\cap B)$؟

2- إذا كان X متغير عشوائي يتبع قانون فوق الهندسي، حيث: $X \rightsquigarrow H(10;3;0{,}4)$

أ- ما هي الحالة التي نطبق فيها قانون فوق الهندسي؟

ب- حدد مجال التعريف؟

ج- أحسب الأمل الرياضي؟

د- أحسب التباين والانحراف المعياري؟

التمرين الثاني:(07 نقاط)

ليكن X متغير عشوائي مستمر معرف بالدالة كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\beta x+\beta & si \quad X\in[0-2]\\ 0 & si \quad X\notin[0-2]\end{cases}$$

1- ما هو الشرط الأساسي حتى تكون $f(x)$ دالة كثافة احتمالية؟

2- عين قيمة الثابت التي تحقق هذا الشرط؟

3- إذا علمت أن : $\beta=\frac{1}{4}$:

أ- مثل بيانيا دالة الكثافة الاحتمالية؟، **ب**- عين دالة التوزيع الاحتمالية $F(X)$ ؟

4- أحسب الاحتمالات التالية: $P(X<2)$، $P(X\geq 4)$ ؟، **5**- أحسب الأمل الرياضي والانحراف المعياري؟

التمرين الثالث:(07 نقاط)

يصل المسافرون عشوائيا إلى موقف الحافلات بمدينة سطيف بمعدل 6 مسافرين كل 10 دقائق ، فليكن X متغير عشوائي يتبع قانون بواسون.

1- عرف بدقة المتغير العشوائي X ؟

2- حدد مجال تعريف المتغير العشوائي X ؟

3- أحسب الأمل الرياضي والانحراف المعياري؟

4- ما هو أقصى عدد محتمل لعدد المسافرين الذين يصلون إلى المحطة كل 10 دقائق؟

5- أحسب الاحتمالات التالية: $P(X=10)$ ، $P(X\leq 10)$، $P(X>10)$ ؟

حلول

امتحانات

سابقة

جامعة فرحات عباس- سطيف1-

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

السنة الأولى LMD **حل امتحان مقياس الإحصاء2 (23 ماي 2015)** **الأقسام: 04،03،02،01**

حل التمرين الأول:

ليكن X متغير عشوائي يمثل العمر بالسنوات لركاب طائرة ما.

1- إثبات أن $f(x)$ دالة كثافة احتمالية:

لدينا:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{-1}{36000}\ (x^2-60x) & \text{si} \quad X\in\Omega=[0-60] \\ 0 & \text{باقي المجال}\end{cases}$$

حتى تكون $f(x)$ دالة كثافة احتمالية يجب تحقق الشرطين:

- الشرط الأول محقق $f(x)\geq 0$

- أما الشرط الثاني والأساسي هو: $\int_\Omega f(x)dx=1 \Rightarrow \int_0^{60}\frac{-1}{36000}.(x^2-60x)\ dx=1$

$$\frac{-1}{36000}.\int_0^{60}(x^2-60x)\,dx=1\Rightarrow\frac{-1}{36000}.\left[\frac{x^3}{3}-30x^2\right]_0^{60}=1$$

$$\Rightarrow\frac{-1}{36000}.\left(\frac{60^3}{3}-30\times60^2\right)-0=\frac{-1}{36000}.(72000-108000)-0=\frac{-1}{36000}.(-36000)=1-0=1$$

ومنه الشرط الثاني والأساسي محقق، إذن هي فعلا دالة كثافة احتمالية.

2- حساب دالة التوزيع الاحتمالية $F(X)$:

لدينا: $F(X)=P(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\,dx$

عند $X<0$:

$$F(X)=\int_{-\infty}^{x}(0)\,dx=0$$

عند $X\in[0-60]$:

$$F(X)=\int_{-\infty}^{0}(0)\,dx+\frac{-1}{36000}\int_0^x(x^2-60x)\,dx=\frac{-1}{36000}.\left(\frac{x^3}{3}-30x^2\right)$$

عند $X>60$:

$$F(X)=\int_{-\infty}^{0}(0)\,dx+\frac{-1}{36000}\int_0^{60}(x^2-60x)\,dx+\int_{60}^{x}(0)\,dx$$

$$=0+\frac{-1}{36000}.\left[\frac{x^3}{3}-30x^2\right]_0^{60}+0=0+1+0=1$$

3- حساب التوقع الرياضي والانحراف المعياري ،علما أن: $m_2=1080$.

- حساب التوقع الرياضي:

$$E(x)=\int_\Omega X.f(x)\,dx=\int_0^{60}x.\frac{-1}{36000}.(x^2-60x)dx=\frac{-1}{36000}\int_0^{60}(x^3-60x^2)dx$$

$$=\frac{-1}{36000}.\left[\frac{x^4}{4}-20x^3\right]_0^{60}$$

$$\Rightarrow\frac{-1}{36000}.\left(\frac{60^4}{4}-20\times60^3\right)-0=\frac{-1}{36000}.(3240000-4320000)-0$$

$= \frac{-1}{36000}.(-1080000) = 30 - 0 = 30$ سنة

– حساب الانحراف المعياري:

لدينا:

$V(X) = m_2 - m_1^2$

حيث:

$m_1 = E(X) = 30$
$m_2 = 1080$
$V(X) = 1080 - (30)^2 = 180$
$\sigma(X) = \sqrt{180} = 13,42$ سنة

4– أ– حساب احتمال أن يفوق عمره 20 سنة:

$$P(X > 20) = \int_{20}^{+\infty} \frac{-1}{36000}(x^2 - 60x)\, dx = 1 - \left[\int_{-\infty}^{20} \frac{-1}{36000}(x^2 - 60x)\, dx\right]$$
$$= 1 - \left[\frac{-x^3}{108000} - \frac{30x^2}{36000}\right]_0^{20} = 1 - (0,26 - 0) = 0,74$$

4– ب– حساب احتمال أن يقل عمره عن 40 سنة:

$$P(X < 40) = P(X \leq 40) = F(40) = \int_{-\infty}^{40} \frac{-1}{36000}.(x^2 - 60x)\, dx = \frac{-1}{36000}.\left[\frac{x^3}{3} - 30x^2\right]_0^{40} = 0,74$$

4– ج– حساب احتمال أن يكون عمره محصورا ما بين 10 سنوات و40 سنة:

$$P(10 < X < 40) = \int_{10}^{40} \frac{-1}{36000}.(x^2 - 60x)dx = \frac{-1}{36000}.\left[\frac{x^3}{3} - 30x^2\right]_{10}^{40} = 0,74 - 0,07 = 0,67$$

حل التمرين الثاني:

المتغير العشوائي في هذه المسألة يتبع قانون Poisson.

1– تعريف المتغير العشوائي في هذه المسألة:

المتغير العشوائي في هذه المسألة هو عدد الزبائن الوافدين إلى أحد المطاعم خلال ساعة، حيث: $X \backsim P(5)$.

2– الصيغة الرياضية لقانون حساب الاحتمالات هي: $P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!}$.

3– أقصى عدد ممكن للزبائن خلال ساعة من الزمن:

بما أن : $X \backsim P(5)$ وانطلاقا من جدول بواسون نلاحظ أن : $x_{max} = 16$.

4– التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير(عرض فقط القيم:الأولى والثانية، وما قبل الأخيرة والأخيرة):

إنطلاقا من جدول بواسون ومن أجل $\lambda = 5$ نلاحظ أن : $X \in \Omega = [0, 1,2,\ldots, 16]$

– حساب الاحتمالات المرافقة للقيم:الأولى والثانية، وما قبل الأخيرة والأخيرة للمتغير X :

$$P(X = 0) = \frac{e^{-5}.5^0}{0!} = e^{-5} = 0,0067$$

$$P(X = 1) = \frac{e^{-5}.5^1}{1!} = 5.e^{-5} = 0,0337$$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$$P(X = 15) = \frac{e^{-5}.5^{15}}{15!} = 0,0001$$

$P(X=16)=\frac{e^{-5}.5^{16}}{16!}=0,0001$

إذن يمكن تلخيص هذا التوزيع في الجدول التالي:

X	0	1	…………	15	16	$\boldsymbol{\Sigma P(X=x_i)}$
$\boldsymbol{P(X=x_i)}$	0,0067	0,0337	…………	0,0001	0,0001	**1**

5- حساب الأمل الرياضي والانحراف المعياري:

ضمن هذا التوزيع يكون الأمل الرياضي مساوي لقيمة λ أي: زبائن $E(X)=\lambda=5$

أما الانحراف المعياري: زبون $\sigma(X)=\sqrt{\lambda}=\sqrt{5}=2,23$

6- أ- حساب احتمال أن يكون عدد الزبائن يفوق 10:

$P(X>10)=P(X=11)+\cdots+P(X=16)=0,0137$

أو مباشرة إنطلاقا من جدول بواسون نجد أن:

$P(X>10)=1-P(X\leq 10)=1-0,9863=0,0137$

6- ب - حساب احتمال أن يكون عدد الزبائن أقل أو يساوي 5:

$P(X\leq 5)=P(X=0)+\cdots+P(X=5)=0,616$

أو مباشرة إنطلاقا من جدول بواسون نجد أن:

$P(X\leq 5)=F(5)=0,616$

حل التمرين الثالث:

X متغير عشوائي يمثل الطول بالسنتيمتر لركاب طائرة ما، حيث $X \rightsquigarrow N(170;10)$

1- حساب احتمال أن يكون طول راكب ما يقل عن 165 سم:

$$P(X<165)\to P\left(Z<\frac{165-170}{10}\right)=P(Z<-0,5)=P(Z>0,5)$$
$$=1-P(Z\leq 0,5)=1-F(0,5)=1-0,6915=0,3085$$
$$P(X<165)=30,85\%$$

2- حساب احتمال أن يكون طول راكب ما محصورا ما بين 165 سم و175 سم:

$$P(165\leq X\leq 175)\to P\left(\frac{165-170}{10}\leq Z\leq\frac{175-170}{10}\right)=P(-0,5\leq Z\leq 0,5)$$
$$=P(Z\leq 0,5)-P(Z\leq -0,5)=P(Z\leq 0,5)-[1-P(Z\leq 0,5)]$$
$$=P(Z\leq 0,5)+P(Z\leq 0,5)-1=2.F(0,5)-1=2.(0,6915)-1=0,383$$
$$P(165\leq X\leq 175)=38,3\%$$

3- حساب المنوال والوسيط مع شرح النتيجتين:

بما أن التوزيع طبيعي فإن: سنتيمتر $\mu=Me=Mo=170$

شرح المنوال: أغلبية ركاب الطائرة أطوالهم تقدر بـ 170 سم.

شرح الوسيط:50% من ركاب الطائرة أطوالهم أقل من 170سم، بينما 50% الباقية من الركاب أطوالهم أكبر من 170سم.

4- أ- حساب الربيع الأول:

$$P(X < Q_1) = 0{,}25$$
$$P(X < Q_1) \rightarrow P(Z < z) = 0{,}25$$

بما أن الاحتمال أقل من 50% أي قيمة z سالبة أي:

$$z_{0,25} = \frac{Q_1 - 170}{10} \rightarrow Q_1 = 170 + (z_{0,25} \times 10)$$
$$z_{0,25} = -0{,}6745$$

إذن: سم $Q_1 = 170 + (-0{,}6745 \times 10) = 163{,}255$

4- ب- حساب العشير الثالث:

$$P(X < D_3) = 0{,}3$$
$$P(X < D_3) \rightarrow P(Z < z) = 0{,}3$$

بما أن الاحتمال أقل من 50% أي قيمة z سالبة أي:

$$z_{0,3} = \frac{D_3 - 170}{10} \rightarrow D_3 = 170 + (z_{0,3} \times 10)$$
$$z_{0,3} = -0{,}5244$$

إذن: سم $D_3 = 170 + (-0{,}5244 \times 10) = 164{,}756$

جامعة فرحات عباس– سطيف1–

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

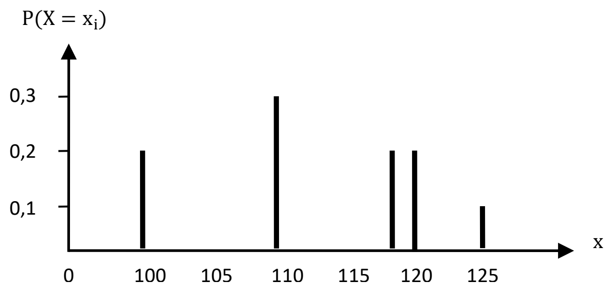
السنة الأولى LMD **حل امتحان مقياس الإحصاء2 (23 ماي 2015)** **الأقسام: 12،11،10،09**

حل التمرين الأول:

التوزيع الاحتمالي لعدد زبائن فندق ما موضح في الجدول التالي:

X	100	110	118	120	125	**$\Sigma P(X = x_i)$**
$P(X = x_i)$	0,2	0,3	0,2	0,2	0,1	**1**

1– التمثيل البياني لهذا التوزيع: بما أن X متغير عشوائي منفصل فالتمثيل يكون عن طريق الأعمدة.



2– حساب دالة التوزيع الاحتمالية F(X) :

لدينا: $F(X) = P(X \leq x) = \sum_{x=x_1}^{x=x_n} P(X = x_i)$

$$F(100) = P(X \leq 100) = 0{,}2$$

$$F(110) = P(X \leq 110) = P(X = 100) + P(X = 110) = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5$$

$$F(118) = P(X \leq 118) = P(X = 100) + P(X = 110) + P(X = 118) = 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}7$$

$$F(120) = P(X \leq 120) = P(X = 100) + P(X = 110) + P(X = 118) + P(X = 120)$$

$$= 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}9$$

$$F(125) = P(X = 100) + P(X = 110) + P(X = 118) + P(X = 120) + P(X = 125)$$

$$= 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}1 = 1$$

أي يمكن التعبير عن هذه الدالة F(X) إما من خلال الجدول(كما هو في الجدول أدناه)، أو من خلال صيغة الدالة الرياضية الآتية:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & x < 100 \\ 0{,}2 & 100 \leq x < 110 \\ 0{,}5 & 110 \leq x < 118 \\ 0{,}7 & 118 \leq x < 120 \\ 0{,}9 & 120 \leq x < 125 \\ 1 & x \geq 125 \end{cases}$$

X	100	110	118	120	125	Σ
$P(X = x_i)$	0,2	0,3	0,2	0,2	0,1	**1**
$F(X)$	0,2	0,5	0,7	0,9	1	-
$E(X) = m_1$	20	33	23,6	24	12,5	113,1
$E(X^2) = m_2$	2000	3630	2784,8	2880	1562,5	12857,3

3- حساب كلا من: $E(X)$، $\sigma(X)$:

$m_1 = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i . P_i = 113,1$ زبون(انظر إلى الجدول أعلاه)

لدينا: $V(X) = m_2 - m_1^2$

$m_2 = E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 . P_i = 12857,3$ (انظر إلى الجدول أعلاه)

$V(X) = 12857,3 - (113,1)^2 = 65,69$

$\sigma(X) = \sqrt{65,69} = 8,1$زبون

4- أ- حساب احتمال أن يكون عدد زبائن الفندق يفوق 100:

$P(X > 100) = P(X = 110) + P(X = 118) + P(X = 120) + P(X = 125) = 0,8$

أو مباشرة من الجدول أعلاه:

$P(X > 100) = 1 - P(X \leq 110) = 1 - F(100) = 1 - 0,2 = 0,8$

4- ب- حساب احتمال أن يكون عدد زبائن الفندق محصورا ما بين 100 و125 (بما في ذلك 100):

$P(100 \leq X < 125) = P(X = 100) + P(X = 110) + P(X = 118) + P(X = 120) = F(120) = 0,9$

حل التمرين الثاني:

X :متغير عشوائي يمثل عدد النساء ضمن العينة المسحوبة.

1- القانون الاحتمالي ل X مع التعليل:

بما أن التجربة لها نتيجتان متنافيتان ألا وهما:الحصول على رجل (حالة فشل:$X = 0$) والحصول على إمرأة (حالة نجاح:$X = 1$)، ولقد تم سحب 10 أفراد ($n > 1$)، وبما أنه لم يشير لنا أن السحب تم بدون إرجاع أو مع الإرجاع، لكن نحن نفهم مباشرة أنه تم بدون إرجاع لأن حجم العينة معلوم وحجم المجتمع معلوم، ومنه نستنتج أن X يتبع قانون فوق الهندسي.

أي: $X \sim H(10; 3; 0,6)$ حيث: $P = \frac{6}{10} = 0,6$ ، $N_1 = 6$ ، $N_2 = 4$

2- تعيين التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير:

التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منفصل هو عبارة عن تحديد مجال التعريف للمتغير العشوائي وتحديد الاحتمالات المناظرة لكل قيمة من قيم مجال التعريف ذلك المتغير.

وعليه التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X يتمثل في :

- تحديد مجال التعريف للمتغير العشوائي X:

$X \in \Omega = [0,1,2,3]$

- تحديد الاحتمالات المناظرة لكل قيمة من قيم مجال التعريف المتغير X:

$P(X = x_i) = \frac{C_{N_1}^{x}.C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n}$

$C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!.(10-3)!} = \frac{10!}{3!.7!} = \frac{10.9.8.7!}{(3.2.1).7!} = 120$

$P(X = 0) = \frac{C_6^0.C_4^{3-0}}{C_{10}^3} = \frac{C_6^0.C_4^3}{C_{10}^3}$

$C_6^0 = 1$

$C_4^3 = 4$

$P(X = 0) = \frac{1\times4}{120} = \frac{4}{120}$

$P(X = 1) = \frac{C_6^1.C_4^{3-1}}{C_{10}^3} = \frac{C_6^1.C_4^2}{C_{10}^3}$

$C_6^1 = 6$

$C_4^2 = \frac{4!}{2!.(4-2)!} = \frac{4!}{2!.2!} = \frac{4.3.2!}{(2.1).2!} = 6$

$P(X = 1) = \frac{6\times6}{120} = \frac{36}{120}$

$P(X = 2) = \frac{C_6^2.C_4^{3-2}}{C_{10}^3} = \frac{C_4^1.C_6^2}{C_{10}^3}$

$C_4^1 = 4$

$C_6^2 = \frac{6!}{2!.(6-2)!} = \frac{6!}{2!.4!} = \frac{6.5.4!}{(2.1).4!} = 15$

$P(X = 2) = \frac{4\times15}{120} = \frac{60}{120}$

$P(X = 3) = \frac{C_6^3.C_4^{3-3}}{C_{10}^3} = \frac{C_4^0.C_6^3}{C_{10}^3}$

$C_4^0 = 1$

$C_6^3 = \frac{6!}{3!.(6-3)!} = \frac{6!}{3!.3!} = \frac{6.5.4.3!}{(3.2.1).3!} = 60$

$P(X = 3) = \frac{1\times60}{120} = \frac{60}{120}$

إذن يمكن تلخيص هذا التوزيع في الجدول التالي:

X	0	1	2	3	**$\Sigma P(X = x_i)$**
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{120}$	$\frac{36}{120}$	$\frac{60}{120}$	$\frac{20}{120}$	**1**

بما أن: $P_i \geq 0$ و $\Sigma P(X = x_i) = 1$ فإن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هو فعلا توزيعا احتماليا.

3- حساب الأمل الرياضي والانحراف المعياري:

- حساب الأمل الرياضي:

$E(X) = n.p = 3 \times 0,6 = 1,8$ إمرأة

- حساب الانحراف المعياري:

$V(X) = n.p.q.\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = 3 \times 0,6 \times 0,4 \times \left(\frac{10-3}{10-1}\right) = 0,56$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{n.p.q\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$

$\sigma(X) = \sqrt{0,56} = 0,75$ إمرأة

4- أ- حساب احتمال أن يكون ضمن العينة إمرأة واحدة:

$P(X = 1) = \frac{36}{120}$

4- ب- حساب احتمال أن يكون ضمن العينة أقل من إمرأتان:

$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{4}{120} + \frac{36}{120} = \frac{40}{120}$

حل التمرين الثالث:

X متغير عشوائي يمثل مستوى الهيموغلوبين في الدم لدى الفرد المختار، حيث $X \rightsquigarrow N(16; 0,9)$

1- حساب احتمال أن يكون مستوى الهيموغلوبين لديه أكبر من 14:

$P(X>14) \to P\left(Z > \frac{14-16}{0,9}\right) = P(Z > -2,22)$
$= 1 - P(Z \le -2,22) = 1 - [1 - P(Z \le 2,22)] = P(Z \le 2,22) = F(2,22) = 0,9868$
$P(X > 14) = 98,68\%$

2- حساب احتمال أن يكون مستوى الهيموغلوبين لديه محصورا ما بين 17 و18:

$P(17 \le X \le 18) \to P\left(\frac{17-16}{0,9} \le Z \le \frac{18-16}{0,9}\right) = P(1,11 \le Z \le 2,22)$
$= P(Z \le 2,22) - P(Z \le 1,11) = F(2,22) - F(1,11)$
$= 0,9868 - 0,8665 = 0,1203$
$P(17 \le X \le 18) = 12,03\%$

3- حساب المنوال والوسيط مع شرح النتيجتين:

بما أن التوزيع طبيعي فإن : $\mu = Me = Mo = 16$

شرح المنوال:أغلبية الأفراد لديهم مستوى الهيموغلوبين يقدر بـ: 16 .

شرح الوسيط:50% من الأفراد لديهم مستوى الهيموغلوبين يقل عن 16، بينما 50% الباقية من الأفراد لديهم مستوى الهيموغلوبين يفوق عن 16.

4- أ- حساب الربيع الثالث:

$P(X < Q_3) = 0,75$
$P(X < Q_3) \to P(Z < z) = 0,75$

بما أن الاحتمال أكبر من 50% أي قيمة z موجبة أي:

$z_{0,75} = \frac{Q_3-16}{0,9} \to Q_3 = 16 + (z_{0,75} \times 0,9)$
$z_{0,75} = +0,6745$

إذن: $Q_3 = 16 + (+0,6745 \times 0,9) = 16,607$

4- ب- حساب المئوي 30:

$P(X < C_{30}) = 0,3$
$P(X < C_{30}) \to P(Z < z) = 0,3$

بما أن الاحتمال أقل من 50% أي قيمة z سالبة أي:

$z_{0,3} = \frac{C_{30}-16}{0,9} \to C_{30} = 16 + (z_{0,3} \times 0,9)$
$z_{0,3} = -0,5244$

إذن: $C_{30} = 16 + (-0,5244 \times 0,9) = 15,528$

جامعة فرحات عباس- سطيف1-

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

السنة الأولى LMD **حل امتحان مقياس الإحصاء2 (22 ماي 2016)** **الأقسام: 12،11،10،09**

حل التمرين الأول:

1- ترجمة هذه المسألة إلى شجرة احتمالية:

قبل رسم الشجرة الاحتمالية، نقوم أولا برمز إلى:

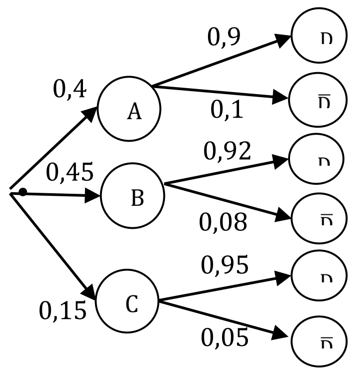
A: إنتاج التمور من الولاية الأولى.

B: إنتاج التمور من الولاية الثانية.

C: إنتاج التمور من الولاية الثالثة.

D: إنتاج التمور من النوع الجيد.

$\overline{D}$: إنتاج التمور من النوع الرديء.



2- احتمال أن يكون هذا الصندوق من إنتاج الولاية A ، الولاية B ، الولاية C:

- احتمال أن يكون هذا الصندوق من إنتاج الولاية A :

$$P(A) = \frac{|A|}{|E|} = \frac{400}{1000} = 0{,}4$$

- احتمال أن يكون هذا الصندوق من إنتاج الولاية B :

$$P(B) = \frac{|B|}{|E|} = \frac{450}{1000} = 0{,}45$$

- احتمال أن يكون هذا الصندوق من إنتاج الولاية C :

$$P(C) = \frac{|C|}{|E|} = \frac{150}{1000} = 0{,}15$$

3- احتمال أن يكون من النوع الرديء، علما أن هذا الصندوق من إنتاج الولاية B:

$$P(\overline{D}/B) = 0{,}08$$

4- أ- احتمال أن يكون هذا الصندوق من النوع الرديء:

$$P(\overline{D}) = P[(A \cap \overline{D}) \cup (B \cap \overline{D}) \cup (C \cap \overline{D})]$$
$$P(\overline{D}) = P(A \cap \overline{D}) \cup P(B \cap \overline{D}) \cup P(C \cap \overline{D})$$
$$P(\overline{D}) = [P(A).P(\overline{D}/A)] + [P(B).P(\overline{D}/B)] + [P(C).P(\overline{D}/C)]$$
$$P(\overline{D}) = (0{,}4 \times 0{,}1) + (0{,}45 \times 0{,}08) + (0{,}15 \times 0{,}05) = 0{,}04 + 0{,}036 + 0{,}0075 = 0{,}0835$$

4- ب - احتمال أن يكون هذا الصندوق من النوع الجيد:

الطريقة الأولى:

$P(D) = 1 - P(\bar{D}) = 1 - 0{,}0835 = 0{,}9165$

الطريقة الثانية:

$P(D) = P[(A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D)]$
$P(D) = P(A \cap D) \cup P(B \cap D) \cup P(C \cap D)$
$P(D) = [P(A).P(D/A)] + [P(B).P(D/B)] + [P(C).P(D/C)]$
$P(D) = (0{,}4 \times 0{,}9) + (0{,}45 \times 0{,}92) + (0{,}15 \times 0{,}95) = 0{,}36 + 0{,}414 + 0{,}1425 = 0{,}9165$

5- احتمال أن يكون من إنتاج الولاية A،الولاية B،الولاية C ،علما أن هذا الصندوق من النوع الرديء:

5- أ- احتمال أن يكون من إنتاج الولاية A ،علما أن هذا الصندوق من النوع الرديء:

$$P(A/\bar{D}) = \frac{P(A \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{P(A).P(\bar{D}/A)}{[P(A).P(\bar{D}/A)]+[P(B).P(\bar{D}/B)]+[P(C).P(\bar{D}/C)]}$$

$$= \frac{(0{,}4 \times 0{,}1)}{(0{,}4 \times 0{,}1)+(0{,}45 \times 0{,}08)+(0{,}15 \times 0{,}05)} = \frac{(0{,}04)}{(0{,}0835)} = 0{,}48$$

5- ب - احتمال أن يكون من إنتاج الولاية B،علما أن هذا الصندوق من النوع الرديء:

$$P(B/\bar{D}) = \frac{P(B \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{P(B).P(\bar{D}/B)}{[P(A).P(\bar{D}/A)]+[P(B).P(\bar{D}/B)]+[P(C).P(\bar{D}/C)]}$$

$$= \frac{(0{,}45 \times 0{,}08)}{(0{,}4 \times 0{,}1)+(0{,}45 \times 0{,}08)+(0{,}15 \times 0{,}05)} = \frac{(0{,}036)}{(0{,}0835)} = 0{,}43$$

5- ج - احتمال أن يكون من إنتاج الولاية C ،علما أن هذا الصندوق من النوع الرديء :

$$P(C/\bar{D}) = \frac{P(C \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{P(C).P(\bar{D}/C)}{[P(A).P(\bar{D}/A)]+[P(B).P(\bar{D}/B)]+[P(C).P(\bar{D}/C)]}$$

$$= \frac{(0{,}15 \times 0{,}05)}{(0{,}4 \times 0{,}1)+(0{,}45 \times 0{,}08)+(0{,}15 \times 0{,}05)} = \frac{(0{,}0075)}{(0{,}0835)} = 0{,}09$$

نلاحظ أن تحقق نظرية بايز : $P(A/\bar{D}) + P(B/\bar{D}) + P(C/\bar{D}) = 0{,}48 + 0{,}43 + 0{,}09 = 1$

حل التمرين الثاني:

المتغير العشوائي في هذه المسألة هو عدد المرضى الذين يدخلون لمصلحة الاستعجالات الطبية بأحد المستشفيات خلال نصف ساعة، حيث: $X \sim P(5)$.

1- أ- حساب احتمال أن يتم دخول ولا مريض خلال نصف ساعة:

$$P(X = 0) = \frac{e^{-5}.5^0}{0!} = e^{-5} = 0{,}0067$$

أو مباشرة إنطلاقا من جدول بواسون نجد أن:

$P(X = 0) = F(0) = 0{,}0067$

1- ب- حساب احتمال أن يتم دخول مريضين خلال نصف ساعة:

$$P(X = 2) = \frac{e^{-5}.5^2}{2!} = e^{-5} = 0{,}0843$$

أو مباشرة إنطلاقا من جدول بواسون نجد أن:

$P(X=2)=F(2)-F(1)=0{,}1247-0{,}0404=\ 0{,}0843$

1- ج- حساب احتمال أن يتم دخول على الأكثر ثلاث مرضى خلال نصف ساعة:

$$P(X\leq 3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$$
$$P(X\leq 3)=0{,}0067+0{,}0337+0{,}0843+0{,}1403=0{,}265$$

أو مباشرة إنطلاقا من جدول بواسون نجد أن:

$P(X\leq 3)=F(3)=0{,}265$

2- حساب التوقع الرياضي والانحراف المعياري:

ضمن هذا التوزيع يكون التوقع الرياضي مساوي لقيمة λ : مرضى $E(X)=\lambda=5$

أما الانحراف المعياري: مريض $\sigma(X)\ =\sqrt{\lambda}=\sqrt{5}=2{,}23$

3- أقصى عدد ممكن للمرضى الذين يدخلون للمصلحة خلال نصف ساعة:

بما أن : $X \backsim P(5)$ وانطلاقا من جدول بواسون نلاحظ أن : مريض $x_{max}=16$.

4- أ- حساب احتمال أن يتم دخول على الأقل ثلاث مرضى خلال ربع ساعة:

هنا قبل الحساب نشير أن هناك متغير عشوائي آخر هو Y الذي يمثل عدد المرضى الذين يدخلون لمصلحة الاستعجالات الطبية بأحد المستشفيات خلال ربع ساعة.

لدينا: ربع ساعة $=\frac{1}{2}$ نصف ساعة، $\lambda_Y=\dfrac{1}{2}\lambda_X$ ومنه: $\lambda_Y=\frac{1}{2}.5=2{,}5$.

أي: $Y \backsim P(2{,}5)$.

$$P(Y\geq 3)=P(Y=3)+P(Y=4)+\cdots+P(Y=11)=\ 0{,}4562$$

أو مباشرة إنطلاقا من جدول بواسون نجد أن:

$P(Y\geq 3)=1-F(2)=1-0{,}5438=\ 0{,}4562$

4- ب- حساب احتمال أن يتم دخول عدد يتراوح ما بين 2 وأقل من أو يساوي 5 مرضى خلال ربع ساعة:

$$P(2<Y\leq 5)=P(Y=3)+P(Y=4)+P(Y=5)$$
$$P(2<Y\leq 5)=0{,}2138+0{,}1336+0{,}0668=0{,}4142$$

أو مباشرة إنطلاقا من جدول بواسون نجد أن:

$$P(2<Y\leq 5)=P(Y=3)+P(Y=4)+P(Y=5)$$
$$=[F(3)-F(2)]+[F(4)-F(3)]+[F(5)-F(4)]$$
$$=[F(5)-F(2)]=(0{,}958\ -0{,}5438)=0{,}4142$$

حل التمرين الثالث:

X متغير عشوائي يمثل درجة الذكاء لمتطوعي الجيش ، حيث $X \backsim N(110;10)$

1- الصيغة الرياضية لدالة الكثافة الاحتمالية :

لدينا: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$

ومنه: $f(x) = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-110}{10})^2}$

2- أ- حساب احتمال أن تكون درجة الذكاء لأحد المتطوعين تقل عن 120:

$$P(X < 120) \to P\left(Z < \frac{120-110}{10}\right) = P(Z \leq 1) = F(1) = 0{,}8413$$
$$P(X < 120) = 84{,}13\%$$

2- ب- حساب احتمال أن تكون درجة الذكاء لأحد المتطوعين محصورة ما بين 105 و115:

$$P(105 \leq X \leq 115) \to P\left(\frac{105-110}{10} \leq Z \leq \frac{115-110}{10}\right) = P(-0{,}5 \leq Z \leq 0{,}5)$$
$$= P(Z \leq 0{,}5) - P(Z \leq -0{,}5) = P(Z \leq 0{,}5) - [1 - P(Z \leq 0{,}5)]$$
$$= P(Z \leq 0{,}5) + P(Z \leq 0{,}5) - 1 = 2.F(0{,}5) - 1 = 2.(0{,}6915) - 1 = 0{,}383$$
$$P(105 \leq X \leq 115) = 38{,}3\%$$

3- حساب المنوال والوسيط مع شرح النتيجتين:

بما أن التوزيع طبيعي فإن : $\mu = Me = Mo = 110$

شرح المنوال:أغلبية متطوعي الجيش تقدر درجة إختبار ذكائهم بـ: 110.

شرح الوسيط:50% من متطوعي الجيش تقل درجة إختبار ذكائهم عن 110، بينما 50% الباقية من متطوعي الجيش تفوق درجة إختبار ذكائهم عن 110.

4- حساب قيمتي الربيع الأول والمئوي 66:

- حساب الربيع الأول:

$$P(X < Q_1) = 0{,}25$$
$$P(X < Q_1) \to P(Z < z) = 0{,}25$$

بما أن الاحتمال أقل من 50% أي قيمة z سالبة أي:

$$z_{0,25} = \frac{Q_1 - 110}{10} \to Q_1 = 110 + (z_{0,25} \times 10)$$
$$z_{0,25} = -0{,}6745$$

إذن: $Q_1 = 110 + (-0{,}6745 \times 10) = 103{,}255$

- حساب المئوي 66:

$$P(X < C_{66}) = 0{,}66$$
$$P(X < C_{66}) \to P(Z < z) = 0{,}66$$

بما أن الاحتمال أكبر من 50% أي قيمة z موجبة أي:

$$z_{0,66} = \frac{C_{66} - 110}{10} \to C_{66} = 110 + (z_{0,66} \times 10)$$
$$z_{0,66} = +0{,}4125$$

إذن: $C_{66} = 110 + (+0{,}4125 \times 10) = 114{,}125$

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

السنة الأولى LMD　　　　حل امتحان مقياس الإحصاء2 (17 ماي 2017)

حل التمرين الأول:

1- ترجمة هذه المسألة إلى شجرة احتمالية:

قبل رسم الشجرة الاحتمالية، نقوم أولا برمز إلى:

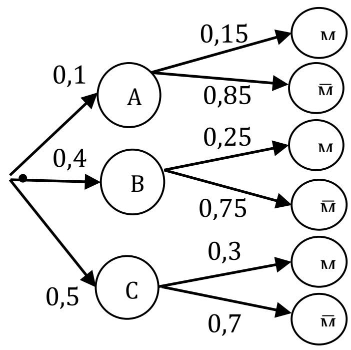
A: الطالب من المعهد الأول.

B: الطالب من المعهد الثاني.

C: الطالب من المعهد الثالث.

M: الطالب راسب.

$\overline{M}$: الطالب ناجح.



2- احتمال أن يكون هذا الطالب: أ- من المعهد A .　　　ب – من المعهد B أوC .

2- أ - احتمال أن يكون هذا الطالب من المعهد A :

$$P(A) = \frac{|A|}{|E|} = 0{,}1$$

2- ب - احتمال أن يكون هذا الطالب من المعهد B أوC :

$$P(B \cup C) = \frac{|B|}{|E|} + \frac{|C|}{|E|} = 0{,}40 + 0{,}50 = 0{,}90$$

3- احتمال أن يكون هذا الطالب راسب علما أنه من المعهد C:

$$P(M/C) = 0{,}3$$

4- أ- احتمال أن يكون هذا الطالب راسبا:

$$P(M) = P[(A \cap M) \cup (B \cap M) \cup (C \cap M)]$$
$$P(M) = P(A \cap M) \cup P(B \cap M) \cup P(C \cap M)$$
$$P(M) = [P(A).P(M/A)] + [P(B).P(M/B)] + [P(C).P(M/C)]$$
$$P(M) = (0{,}1 \times 0{,}15) + (0{,}4 \times 0{,}25) + (0{,}5 \times 0{,}3) = 0{,}015 + 0{,}1 + 0{,}15 = 0{,}265$$

4- ب - احتمال أن يكون هذا الطالب ناجحا:

الطريقة الأولى:

$P(\bar{M}) = 1 - P(M) = 1 - 0{,}265 = 0{,}735$

الطريقة الثانية:

$P(\bar{M}) = P[(A \cap \bar{M}) \cup (B \cap \bar{M}) \cup (C \cap \bar{M})]$
$P(\bar{M}) = P(A \cap \bar{M}) \cup P(B \cap \bar{M}) \cup P(C \cap \bar{M})$
$P(\bar{M}) = [P(A).P(\bar{M}/A)] + [P(B).P(\bar{M}/B)] + [P(C).P(\bar{M}/C)]$
$P(\bar{M}) = (0{,}1 \times 0{,}85) + (0{,}4 \times 0{,}75) + (0{,}5 \times 0{,}7) = 0{,}085 + 0{,}3 + 0{,}35 = 0{,}735$

5- احتمال أن يكون من المعهد A، المعهد B، المعهد C ،علما أن هذا الطالب راسب:

5- أ- احتمال أن يكون من المعهد A ، علما أن هذا الطالب راسب:

$$P(A/M) = \frac{P(A\cap M)}{P(M)} = \frac{P(A).P(M/A)}{[P(A).P(M/A)]+[P(B).P(M/B)]+[P(C).P(M/C)]}$$

$$= \frac{(0{,}1\times0{,}15)}{(0{,}1\times0{,}15)+(0{,}4\times0{,}25)+(0{,}5\times0{,}3)} = \frac{(0{,}015)}{(0{,}265)} = 0{,}0566$$

5- ب - احتمال أن يكون من المعهد B، علما أن هذا الطالب راسب:

$$P(B/M) = \frac{P(B\cap M)}{P(M)} = \frac{P(B).P(M/B)}{[P(A).P(M/A)]+[P(B).P(M/B)]+[P(C).P(M/C)]}$$

$$= \frac{(0{,}4\times0{,}25)}{(0{,}1\times0{,}15)+(0{,}4\times0{,}25)+(0{,}5\times0{,}3)} = \frac{(0{,}1)}{(0{,}265)} = 0{,}3774$$

5- ج - احتمال أن يكون من المعهد C، علما أن هذا الطالب راسب:

$$P(C/M) = \frac{P(C\cap M)}{P(M)} = \frac{P(C).P(M/C)}{[P(A).P(M/A)]+[P(B).P(M/B)]+[P(C).P(M/C)]}$$

$$= \frac{(0{,}5\times0{,}3)}{(0{,}1\times0{,}15)+(0{,}4\times0{,}25)+(0{,}5\times0{,}3)} = \frac{(0{,}15)}{(0{,}265)} = 0{,}5660$$

نلاحظ أن تحقق نظرية بايز : $P(A/M) + P(B/M) + P(C/M) = 0{,}0566 + 0{,}3774 + 0{,}566 = 1$

حل التمرين الثاني:

X متغير عشوائي يمثل عدد الرجال ضمن وفد معين مشكل من 4 أشخاص.

1- نوع هذا المتغير العشوائي:متغير عشوائي منفصل

X	0	1	2	3	4	Σ
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	1
$F(X)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{9}{10}$	1	-
$E(X) = m_1$	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{19}{10}$
$E(X^2) = m_2$	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{12}{10}$	$\frac{18}{10}$	$\frac{16}{10}$	$\frac{49}{10}$

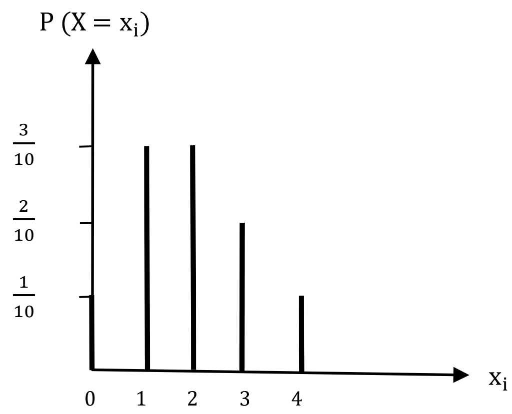
2- إيجاد قيمة a حتى يكون هذا التوزيع فعلا توزيعا احتماليا والتمثيل البياني له:

2. أ- إيجاد قيمة a حتى يكون هذا التوزيع فعلا توزيعا احتماليا:

- الشرط الأساسي حتى يكون التوزيع لمتغير عشوائي منفصل توزيعا احتماليا هو: $\Sigma P(X = x_i) = 1$

أي: $a + 3a + 3a + 2a + a = 1 \Rightarrow 10a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{10}$

2. ب- التمثيل البياني لهذا التوزيع الاحتمالي:



3- إيجاد دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$ والتمثيل البياني لها علما أن a تساوي $\frac{1}{10}$:

3. أ- إيجاد دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$ علما أن a تساوي $\frac{1}{10}$:

لدينا: $F(X) = P(X \leq x) = \sum_{x=x_1}^{x=x_n} P(X = x_i)$

$$F(0) = P(X \leq 0) = \frac{1}{10}$$

$$F(1) = P(X \leq 1) = F(0) + P(X = 1) = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{4}{10}$$

$$F(2) = P(X \leq 2) = F(1) + P(X = 2) = \frac{4}{10} + \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

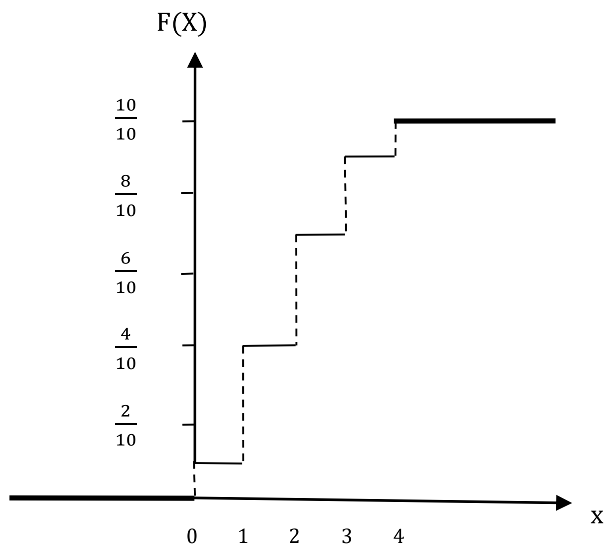
$$F(3) = P(X \leq 3) = F(2) + P(X = 3) = \frac{7}{10} + \frac{2}{10} = \frac{9}{10}$$

$$F(4) = P(X \leq 4) = F(3) + P(X = 4) = \frac{9}{10} + \frac{1}{10} = 1$$

أي يمكن التعبير عن هذه الدالة $F(x)$ إما من خلال الجدول(كما هو في الجدول أعلاه)، أو من خلال صيغة الدالة الرياضية الآتية:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{10} & 0 \le x < 1 \\ \frac{4}{10} & 1 \le x < 2 \\ \frac{7}{10} & 2 \le x < 3 \\ \frac{9}{10} & 3 \le x < 4 \\ 1 & x \ge 4 \end{cases}$$

3. ب- التمثيل البياني لدالة التوزيع الاحتمالية $F(X)$:



4- حساب الأمل الرياضي والانحراف المعياري:

4. أ- حساب الأمل الرياضي:

$m_1 = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i . P_i = \frac{19}{10} = 1{,}9$ رجل (انظر إلى الجدول أعلاه)

4. ب- حساب الانحراف المعياري:

لدينا: $V(X) = m_2 - m_1^2$

$m_2 = E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 . P_i = \frac{49}{10} = 4{,}9$ (انظر إلى الجدول أعلاه)

$V(X) = 4{,}9 - (1{,}9)^2 = 1{,}29$

$\delta(X) = \sqrt{1{,}29} = 1{,}13$ رجل

5. حساب الاحتمالات التالية:

5. أ- حساب احتمال أن يكون عدد الرجال أقل من 3 ضمن الوفد الواحد:

$P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = F(2) = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{7}{10} = 0{,}7$

5. ب- حساب احتمال أن يكون عدد الرجال أكبر من5 ضمن الوفد الواحد:

$P(X > 5) = 0$ غير معرف

5.ج- حساب احتمال أن يكون عدد الرجال أكبر من1 وأقل من 4 ضمن الوفد الواحد:

$$P(1 < X < 4) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{3}{10} + \frac{2}{10} = \frac{5}{10} = 0,5$$

حل التمرين الثالث:

X:متغير عشوائي يمثل أوزان الأشخاص مرتادي هذه القاعة الرياضية ، حيث: $X \rightsquigarrow N(71; 5,8)$

1- الصيغة الرياضية لدالة الكثافة الاحتمالية لكل من القانون الطبيعي والقانون الطبيعي المعياري:

- الصيغة الرياضية لدالة الكثافة الاحتمالية للقانون الطبيعي:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$

- الصيغة الرياضية لدالة الكثافة الاحتمالية للقانون الطبيعي المعياري:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z)^2}$$

2- حساب الاحتمالات التالية:

2- أ- حساب احتمال أن يكون وزن شخص ما أقل من 60 كلغ:

$$P(X < 60) \rightarrow P\left(Z < \frac{60-71}{5,8}\right) = P(Z < -1,89) = P(Z > 1,89)$$
$$= 1 - P(Z \leq 1,89) = 1 - F(1,89) = 1 - 0,9706 = 0,0294$$
$$P(X < 60) = 2,94\%$$

2- ب- حساب احتمال أن يكون وزن شخص ما يفوق 80 كلغ:

$$P(X > 80) \rightarrow P\left(Z > \frac{80-71}{5,8}\right) = P(Z > 1,55)$$
$$= 1 - P(Z \leq 1,55) = 1 - F(1,55) = 1 - 0,9394 = 0,0606$$
$$P(X > 80) = 6,06\%$$

2-ج- حساب احتمال أن يكون وزن شخص ما يتراوح ما بين 65 كلغ و83 كلغ:

$$P(65 \leq X \leq 83) \rightarrow P\left(\frac{65-71}{5,8} \leq Z \leq \frac{83-71}{5,8}\right) = P(-1,03 \leq Z \leq 2,06)$$
$$= P(Z \leq 2,06) - P(Z \leq -1,03) = P(Z \leq 2,06) - [1 - P(Z \leq 1,03]$$
$$= P(Z \leq 2,06) + P(Z \leq 1,03) - 1 = 0,9803 + 0,8485 - 1 = 0,8288$$
$$P(65 \leq X \leq 83) = 82,88\%$$

3- حساب قيمتي الربيع الأول والمئوي 73 مع شرح النتيجتين:

- حساب قيمة الربيع الأول مع شرح النتيجة:

$$P(X < Q_1) = 0,25$$
$$P(X < Q_1) \rightarrow P(Z < z) = 0,25$$

بما أن الاحتمال أقل من 50% أي قيمة z سالبة أي:

$$z_{0,25} = \frac{Q_1 - 71}{5,8} \rightarrow Q_1 = 71 + (z_{0,25} \times 5,8)$$
$$z_{0,25} = -0,6745$$

إذن: $Q_1 = 71 + (-0,6745 \times 5,8) = 67,09$ كلغ

الشرح: لدينا 25% من الأشخاص مرتادي هذه القاعة الرياضية أوزانهم تقل عن67,09كلغ، بينما 75% الباقية من الأشخاص مرتادي هذه القاعة الرياضية أوزانهم تفوق 67,09كلغ.

– حساب قيمة المئوي 73 مع شرح النتيجة:

$$P(X < C_{73}) = 0,73$$
$$P(X < C_{73}) \rightarrow P(Z < z) = 0,73$$

بما أن الاحتمال أكبر من 50% أي قيمة z موجبة أي:

$$z_{0,73} = \frac{C_{73} - 71}{5,8} \rightarrow C_{73} = 71 + (z_{0,73} \times 5,8)$$
$$z_{0,73} = +0,6128$$

إذن: $C_{66} = 71 + (+0,6128 \times 5,8) = 74,55$ كلغ

الشرح: لدينا 73% من الأشخاص مرتادي هذه القاعة الرياضية أوزانهم تقل عن74,55كلغ، بينما 27% الباقية من الأشخاص مرتادي هذه القاعة الرياضية أوزانهم تفوق 74,55 كلغ.

جامعة فرحات عباس- سطيف1-

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

السنة الأولى LMD **حل امتحان مقياس الإحصاء2 (25 ماي 2018)** **الأقسام: من 1 إلى 6**

حل التمرين الأول:

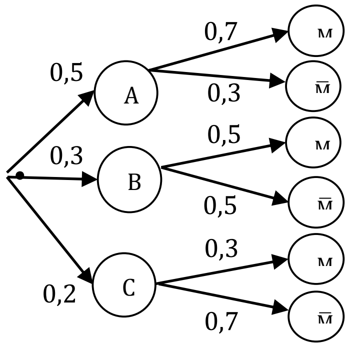
1- ترجمة معطيات هذه المسألة إلى شجرة احتمالية:

قبل رسم الشجرة الاحتمالية، نقوم أولا برمز إلى:

A: الولاية الأولى. M: حصول القناة التلفزيونية على الصفقة.

B: الولاية الثانية. $\overline{M}$: عدم حصول القناة التلفزيونية على الصفقة.

C: الولاية الثالثة.



2- احتمال: أ- حصول الولاية A على شرف تنظيم المنافسة؟ ب - حصول الولاية B على شرف تنظيم المنافسة وفوز القناة التلفزيونية بالصفقة :

2- أ - احتمال حصول الولاية A على شرف تنظيم المنافسة:

$$P(A) = \frac{|A|}{|E|} = 0,5$$

2- ب - احتمال حصول الولاية B على شرف تنظيم المنافسة وفوز القناة التلفزيونية بالصفقة:

$$P\,(B \cap M) = [P(B).P(M/C)] = (0,3 \times 0,5) = 0,15$$

3- احتمال حصول القناة التلفزيونية على الصفقة:

$$P(M) = P[(A \cap M) \cup (B \cap M) \cup (C \cap M)]$$
$$P(M) = P(A \cap M) \cup P\,(B \cap M) \cup P\,(C \cap M)$$
$$P(M) = [P(A).P(M/A)] + [P(B).P(M/B)] + [P(C).P(M/C)]$$
$$P(M) = (0,5 \times 0,7) + (0,3 \times 0,5) + (0,2 \times 0,3) = 0,35 + 0,15 + 0,06 = 0,56$$

4- احتمال أن يكون شرف تنظيم المنافسة قد فازت به: الولايةA، الولاية B،علما أن القناة التلفزيونية حصلت فعلا على الصفقة:

4- أ- احتمال أن يكون شرف تنظيم المنافسة قد فازت به الولاية A ،علما أن القناة التلفزيونية حصلت فعلا على الصفقة:

$$P(A/M) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)} = \frac{P(A).P(M/A)}{[P(A).P(M/A)]+[P(B).P(M/B)]+[P(C).P(M/C)]}$$

$$= \frac{(0,5\times0,7)}{(0,5\times0,7)+(0,3\times0,5)+(0,2\times0,3)} = \frac{(0,35)}{(0,56)} = 0,625$$

4- ب - احتمال أن يكون شرف تنظيم المنافسة قد فازت به الولاية B ،علما أن القناة التلفزيونية حصلت فعلا على الصفقة:

$$P(B/M) = \frac{P(B\cap M)}{P(M)} = \frac{P(B).P(M/B)}{[P(A).P(M/A)]+[P(B).P(M/B)]+[P(C).P(M/C)]}$$

$$= \frac{(0,3\times0,5)}{(0,5\times0,7)+(0,3\times0,5)+(0,2\times0,3)} = \frac{(0,15)}{(0,56)} = 0,267$$

حل التمرين الثاني:

التوزيع التالي يبين عدد المرضى في مصلحة الاستعجالات أسبوعيا في إحدى المستشفيات.

1- إثبات أن التوزيع فعلا هو توزيعا احتماليا:

- الشرط الأساسي حتى يكون التوزيع لمتغير عشوائي منفصل توزيعا احتماليا هو: $\Sigma P(X = x_i) = 1$.

أي: $0,2 + 0,3 + 0,2 + 0,2 + 0,1 = 1$

ومنه هو فعلا توزيعا احتماليا.

X	40	55	67	90	100	**Σ**
$\mathbf{P(X = x_i)}$	0,2	0,3	0,2	0,2	0,1	1
$\mathbf{F(X)}$	0,2	0,5	0,7	0,9	1	-
$\mathbf{E(X) = m_1}$	8	16,5	13,4	18	10	65,9
$\mathbf{E(X^2) = m_2}$	320	907,5	897,5	1620	1000	4745

2- إيجاد دالة التوزيع الاحتمالية F(X) ثم تمثيلها بيانيا:

- إيجاد دالة التوزيع الاحتمالية F(X) :

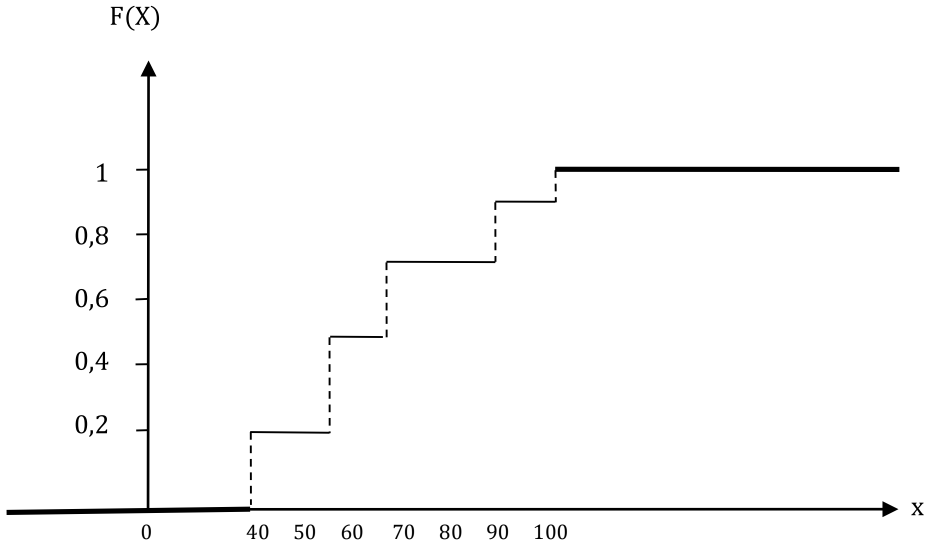
لدينا: $F(X) = P(X \le x) = \sum_{x=x_1}^{x=x_n} P(X = x_i)$

$$F(40) = P(X \le 40) = 0,2$$
$$F(55) = P(X \le 55) = F(40) + P(X = 55) = 0,2 + 0,3 = 0,5$$
$$F(67) = P(X \le 67) = F(55) + P(X = 67) = 0,5 + 0,2 = 0,7$$
$$F(90) = P(X \le 90) = F(67) + P(X = 90) = 0,7 + 0,2 = 0,9$$
$$F(100) = P(X \le 100) = F(90) + P(X = 100) = 0,9 + 0,1 = 1$$

أي يمكن التعبير عن هذه الدالة F(X) إما من خلال الجدول (كما هو مبين في الجدول أعلاه)، أو من خلال صيغة الدالة الرياضية الآتية:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & x < 40 \\ 0,2 & 40 \le x < 55 \\ 0,5 & 55 \le x < 67 \\ 0,7 & 67 \le x < 90 \\ 0,9 & 90 \le x < 100 \\ 1 & x \ge 100 \end{cases}$$

– التمثيل البياني لدالة التوزيع الاحتمالية $F(X)$:



3- حساب كلا من $E(X)$ و $\sigma(X)$:

– حساب $E(X)$:

$m_1 = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i . P_i = 65{,}9$ مريض (انظر إلى الجدول أعلاه)

– حساب $\delta(X)$:

لدينا: $V(X) = m_2 - m_1^2$

$m_2 = E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 . P_i = 4745$ (انظر إلى الجدول أعلاه)

$V(X) = 4745 - (65{,}9)^2 = 402{,}19$

$\sigma(X) = \sqrt{402{,}19} = 20{,}05$ مريض

4- احتمال أن يكون عدد المرضى:أ- يفوق67 مريضا، ب- محصور بين 55 و90 مريضا(بما في ذلك 90):

4- أ- حساب احتمال أن يكون عدد المرضى يفوق67 مريضا :

$P(X > 67) = P(X = 90) + P(X = 100) = 1 - F(67) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

4- ب- حساب احتمال أن يكون عدد المرضى محصور بين 55 و90 مريضا(بما في ذلك 90):

$P(55 < X \leq 90) = P(X = 67) + P(X = 90) = 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}4$

حل التمرين الثالث:

X متغير عشوائي يمثل وزن أكياس الإسمنت من طرف أحد المصانع ، حيث $X \leadsto N(50; 0{,}8)$

1- حساب نسبة الأكياس التي يتجاوز وزنها 51,3 كلغ:

$P(X > 51{,}3) \rightarrow P\left(Z > \frac{51{,}3-50}{0{,}8}\right) = P(Z > 1{,}62)$

$= 1 - P(Z \leq 1{,}62) = 1 - F(1{,}62) = 1 - 0{,}9474 = 0{,}0526$

$P(X > 51{,}3) = 5{,}26\%$

2- حساب نسبة الأكياس التي يتراوح وزنها ما بين $49,8$ كلغ و $52,12$ كلغ:

$$P(49{,}8 \leq X \leq 52{,}12) \rightarrow P\left(\frac{49{,}8-50}{0{,}8} \leq Z \leq \frac{52{,}12-50}{0{,}8}\right) = P(-0{,}25 \leq Z \leq 2{,}65)$$
$$= P(Z \leq 2{,}65) - P(Z \leq -0{,}25) = P(Z \leq 2{,}65) - [1 - P(Z \leq 0{,}25]$$
$$= F(2{,}65) + F(0{,}25) - 1 = (0{,}996) + (0{,}5987) - 1 = 0{,}5947$$
$$P(49{,}8 \leq X \leq 52{,}12) = 59{,}47\%$$

3- حساب المنوال والوسيط مع شرح النتيجتين:

بما أن التوزيع طبيعي فإن: $\mu = Me = Mo = 50$ كلغ.

شرح المنوال: أغلبية أكياس الإسمنت أوزانها تقدر بـ: 50 كلغ.

شرح الوسيط: 50% من أكياس الإسمنت أوزانها تقل عن 50 كلغ، بينما 50% الباقية من أكياس الإسمنت أوزانها تفوق عن 50 كلغ.

4- إيجاد قيمتي α و β مع شرح معناهما :

- حساب قيمة α مع شرح النتيجة:

$$P(X < \alpha) = 0{,}75$$
$$P(X < \alpha) \rightarrow P(Z < z) = 0{,}75$$

بما أن الاحتمال أكبر من 50% أي قيمة z موجبة أي:

$$z_{0,75} = \frac{\alpha-50}{0{,}8} \rightarrow \alpha = 50 + (z_{0,75} \times 0{,}8)$$
$$z_{0,75} = +0{,}6745$$

إذن: $\alpha = 50 + (+0{,}6745 \times 0{,}8) = 50{,}54$ كلغ

الشرح: لدينا 75% من أكياس الإسمنت أوزانها تقل عن 50,54 كلغ ،بينما 25% الباقية من أكياس الإسمنت أوزانها تفوق عن 50,54 كلغ.

- حساب قيمة β مع شرح النتيجة:

$$P(X > \beta) = 0{,}35 \Rightarrow P(X < \beta) = 0{,}65$$
$$P(X > \beta) \rightarrow P(Z < z) = 0{,}65$$

بما أن الاحتمال أكبر من 50% أي قيمة z موجبة أي:

$$z_{0,65} = \frac{\beta-50}{0{,}8} \rightarrow \beta = 50 + (z_{0,65} \times 0{,}8)$$
$$z_{0,65} = +0{,}3853$$

إذن: $\beta = 50 + (+0{,}3853 \times 0{,}8) = 50{,}31$ كلغ

الشرح: لدينا 65% من أكياس الإسمنت أوزانها تقل عن 50,31 كلغ ، بينما 35% الباقية من أكياس الإسمنت أوزانها تفوق عن 50,31 كلغ.

جامعة فرحات عباس- سطيف1-

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

السنة الأولى LMD **حل امتحان مقياس الإحصاء2 (12 سبتمبر 2019)**

حل التمرين الأول:

1- لدينا: A وB حدثان متنافيان ومتكاملان بالنسبة لمجموعة الأساس حيث: $P(A) = \frac{3}{8}$، $P(B/A) = \frac{2}{3}$

1- أ- معنى العبارة P(B/A): تمثل الاحتمال الشرطي للحدث العشوائي B، حيث تقرأ: احتمال تحقق الحدث B علما أن الحدث A تحقق فعلا.

1- ب- حساب $P(A \cap B)$:

لدينا: $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

ومنه: $P(A \cap B) = P(A).P(B/A) = \frac{3}{8}.\frac{2}{3} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

2- لدينا X: متغير عشوائي يتبع قانون فوق الهندسي، حيث: $X \leadsto H(10;3;0,4)$

2- أ- الحالة التي نطبق فيها قانون فوق الهندسي: نطبق قانون فوق الهندسي في حالة وجود تجربة لها نتيجتان متنافيتان ألا وهما: (حالة فشل: $X = 0$) (حالة نجاح: $X = 1$)، والتجربة تتكرر n مرة $(n > 1)$، والسحب دون إرجاع أي حالة عينة غير مستقلة.

2- ب- تحديد مجال التعريف:

$X \in \Omega = [0,1,2,3]$

2-ج- حساب الأمل الرياضي:

$E(X) = n.p = 3 \times 0,4 = 1,2$

2-د- حساب التباين والانحراف المعياري:

$$V(X) = n.p.q.\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = 3 \times 0,4 \times 0,6 \times \left(\frac{10-3}{10-1}\right) = 0,56$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{n.p.q.\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{0,56} = 0,75$$

حل التمرين الثاني:

لدينا X: متغير عشوائي مستمر معرف كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \beta x + \beta & si \quad X \in [0-2] \\ 0 & si \quad X \notin [0-2] \end{cases}$$

1- الشرط الأساسي حتى تكون f(x) دالة كثافة احتمالية هو: $\int_\Omega f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_0^2 (\beta x + \beta)\,dx = 1$

2- تعيين قيمة الثابت التي تحقق هذا الشرط:

$$\int_0^2 (\beta x + \beta)\,dx = 1 \Rightarrow \left[\frac{\beta x^2}{2} + \beta x\right]_0^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{4\beta}{2} + 2\beta\right) - 0 = 1$$

$$\Rightarrow 4\beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{4}$$

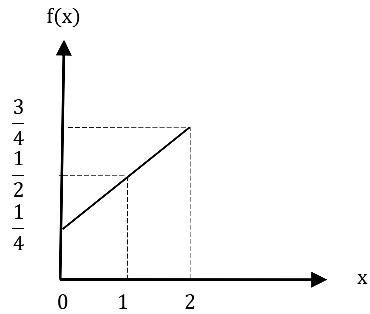
3- بما أن: $\beta = \frac{1}{4}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} & si \quad X \in [0-2] \\ 0 & si \quad X \notin [0-2] \end{cases}$$

3- أ- التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية:

*** الجدول المساعد:**

x	0	1	2
f(x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$



3- ب- تعيين دالة التوزيع الاحتمالية $F(X)$:

لدينا: $F(X) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$

عند $X < 0$:

$F(X) = \int_{-\infty}^{x}(0)\,dx = 0$

عند $X \in [0-2]$:

$F(X) = \int_{-\infty}^{0}(0)\,dx + \int_{0}^{x}(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4})\,dx = \frac{x^2}{8} + \frac{x}{4}$

عند $X > 2$:

$F(X) = \int_{-\infty}^{0}(0)\,dx + \int_{0}^{2}(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4})\,dx + \int_{2}^{x}(0)\,dx$

$= 0 + \left[\frac{x^2}{8} + \frac{x}{4}\right]_0^2 + 0 = 0 + 1 + 0 = 1$

4- حساب الاحتمالات التالية: $P(X < 2)$، $P(X \geq 4)$.

$P(X < 2) = F(2) = \int_{0}^{2}(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4})\,dx = \left[\frac{x^2}{8} + \frac{x}{4}\right]_0^2 = 1$

$P(X \geq 4) = \int_{4}^{+\infty}(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4})\,dx = 1 - \left[\int_{-\infty}^{4}\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right)dx\right] = 1 - F(+\infty) = 1 - 1 = 0$

5- حساب الأمل الرياضي والانحراف المعياري:

- حساب الأمل الرياضي:

$E(x) = \int_{\Omega} X.f(x)\,dx = \int_{0}^{2} x.\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right)dx = \int_{0}^{2}\left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}\right)dx = \left[\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{8}\right]_0^2 = \frac{7}{6} - 0 = 1{,}16$

- حساب الانحراف المعياري:

لدينا:

$V(X) = m_2 - m_1^2$

حيث:

$m_1 = E(X) = \frac{7}{6} = 1{,}16$

$m_2 = \int_{\Omega} X^2 . f(x)\, dx = \int_0^2 x^2 . \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right) dx = \int_0^2 \left(\frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{4}\right) dx = \left[\frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{12}\right]_0^2 = \frac{5}{3} - 0 = 1{,}66$

$V(X) = \frac{5}{3} - \left(\frac{7}{6}\right)^2 = 0{,}3$

$\sigma(X) = \sqrt{0{,}3} = 0{,}55$

حل التمرين الثالث:

لدينا: $X \sim P(6)$

1- تعريف المتغير العشوائي X بدقة: هو عدد المسافرين الذين يصلون إلى موقف الحافلات بمدينة سطيف خلال كل 10دقائق.

2- تحديد مجال تعريف المتغير العشوائي X :

$X \in \Omega = [0, 1,2,\ldots,18]$

3- حساب الأمل الرياضي والانحراف المعياري:

ضمن هذا التوزيع يكون الأمل الرياضي مساوي لقيمة λ: $E(X) = \lambda = 6$ مسافرين

أما الانحراف المعياري: $\delta(X) = \sqrt{\lambda} = \sqrt{6} = 2{,}45$ مسافر

4- أقصى عدد محتمل لعدد المسافرين الذين يصلون إلى المحطة كل 10 دقائق:

إنطلاقا من جدول بواسون نلاحظ أن : $x_{max} = 18$ مسافر .

5- حساب الاحتمالات التالية: $P(X = 10)$ ، $P(X \leq 10)$، $P(X > 10)$:

$P(X = 10) = \frac{e^{-6} . 6^{10}}{10!} = 0{,}0413$

أو مباشرة إنطلاقا من جدول بواسون نجد أن:

$P(X = 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 9) = F(10) - F(9) = 0{,}9574 - 0{,}9161 = 0{,}0413$

$P(X \leq 10) = P(X = 0) + \cdots + P(X = 10) = 0{,}9574$

أو مباشرة إنطلاقا من جدول بواسون نجد أن:

$P(X \leq 10) = F(10) = 0{,}9574$

$P(X > 10) = P(X = 11) + \cdots + P(X = 18) = 0{,}0426$

أو مباشرة إنطلاقا من جدول بواسون نجد أن:

$P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - F(10) = 1 - 0{,}9574 = 0{,}0426$

خـــــــاتمة

امتحانات

سـابقة

الملحق رقم 1: الجداول المتعلقة بقانون ثنائي الحدين

دالة التوزيع الاحتمالية لقانون ثنائي الحدين $F(x)=P(X\le x)=\sum_{k\le x} C_n^k.p^k.(1-p)^{n-k}$

n	x	p								
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
n=5	0	0,5905	0,3277	0,1681	0,0778	0,0313	0,0102	0,0024	0,0003	0,0000
	1	0,9185	0,7373	0,5282	0,3370	0,1875	0,0870	0,0308	0,0067	0,0005
	2	0,9914	0,9421	0,8369	0,6826	0,5000	0,3174	0,1631	0,0579	0,0086
	3	0,9995	0,9933	0,9692	0,9130	0,8125	0,6630	0,4718	0,2627	0,0815
	4	1	0,9997	0,9976	0,9898	0,9688	0,9222	0,8319	0,6723	0,4095
	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1
n=10	0	0,3487	0,1074	0,0282	0,0060	0,0010	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,7361	0,3758	0,1493	0,0464	0,0107	0,0017	0,0001	0,0000	0,0000
	2	0,9298	0,6778	0,3828	0,1673	0,0547	0,0123	0,0016	0,0001	0,0000
	3	0,9872	0,8791	0,6496	0,3823	0,1719	0,0548	0,0106	0,0009	0,0000
	4	0,9984	0,9672	0,8497	0,6331	0,3770	0,1662	0,0473	0,0064	0,0001
	5	0,9999	0,9936	0,9527	0,8338	0,6230	0,3669	0,1503	0,0328	0,0016
	6	1	0,9991	0,9894	0,9452	0,8281	0,6177	0,3504	0,1209	0,0128
	7	1	0,9999	0,9984	0,9877	0,9453	0,8327	0,6172	0,3222	0,0702
	8	1	1	0,9999	0,9983	0,9893	0,9536	0,8507	0,6242	0,2639
	9	1	1	1	0,9999	0,9990	0,9940	0,9718	0,8926	0,6513
	10	1	1	1	1	1	1	1	1	1
n=15	0	0,2059	0,0352	0,0047	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,5490	0,1671	0,0353	0,0052	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,8159	0,3980	0,1268	0,0271	0,0037	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,9444	0,6482	0,2969	0,0905	0,0176	0,0019	0,0001	0,0000	0,0000
	4	0,9873	0,8358	0,5155	0,2173	0,0592	0,0093	0,0007	0,0000	0,0000
	5	0,9978	0,9389	0,7216	0,4032	0,1509	0,0338	0,0037	0,0001	0,0000
	6	0,9997	0,9819	0,8689	0,6098	0,3036	0,0950	0,0152	0,0008	0,0000
	7	1	0,9958	0,9500	0,7869	0,5000	0,2131	0,0500	0,0042	0,0000
	8	1	0,9992	0,9848	0,9050	0,6964	0,3902	0,1311	0,0181	0,0003
	9	1	0,9999	0,9963	0,9662	0,8491	0,5968	0,2784	0,0611	0,0022
	10	1	1	0,9993	0,9907	0,9408	0,7827	0,4845	0,1642	0,0127
	11	1	1	0,9999	0,9981	0,9824	0,9095	0,7031	0,3518	0,0556
	12	1	1	1	0,9997	0,9963	0,9729	0,8732	0,6020	0,1841
	13	1	1	1	1	0,9995	0,9948	0,9647	0,8329	0,4510
	14	1	1	1	1	1	0,9995	0,9953	0,9648	0,7941
	15	1	1	1	1	1	1	1	1	1

n	x	p								
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
n=20	0	0,1216	0,0115	0,0008	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,3917	0,0692	0,0076	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,6769	0,2061	0,0355	0,0036	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,8670	0,4114	0,1071	0,0160	0,0013	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,9568	0,6296	0,2375	0,0510	0,0059	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,9887	0,8042	0,4164	0,1256	0,0207	0,0016	0,0000	0,0000	0,0000
	6	0,9976	0,9133	0,6080	0,2500	0,0577	0,0065	0,0003	0,0000	0,0000
	7	0,9996	0,9679	0,7723	0,4159	0,1316	0,0210	0,0013	0,0000	0,0000
	8	0,9999	0,9900	0,8867	0,5956	0,2517	0,0565	0,0051	0,0001	0,0000
	9	1	0,9974	0,9520	0,7553	0,4119	0,1275	0,0171	0,0006	0,0000
	10	1	0,9994	0,9829	0,8725	0,5881	0,2447	0,0480	0,0026	0,0000
	11	1	0,9999	0,9949	0,9435	0,7483	0,4044	0,1133	0,0100	0,0001
	12	1	1	0,9987	0,9790	0,8684	0,5841	0,2277	0,0321	0,0004
	13	1	1	0,9997	0,9935	0,9423	0,7500	0,3920	0,0867	0,0024
	14	1	1	1	0,9984	0,9793	0,8744	0,5836	0,1958	0,0113
	15	1	1	1	0,9997	0,9941	0,9490	0,7625	0,3704	0,0432
	16	1	1	1	1	0,9987	0,9840	0,8929	0,5886	0,1330
	17	1	1	1	1	0,9998	0,9964	0,9645	0,7939	0,3231
	18	1	1	1	1	1	0,9995	0,9924	0,9308	0,6083
	19	1	1	1	1	1	1	0,9992	0,9885	0,8784
	20	1	1	1	1	1	1	1	1	1
n=30	0	0,0424	0,0012	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,1837	0,0105	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,4114	0,0442	0,0021	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,6474	0,1227	0,0093	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,8245	0,2552	0,0302	0,0015	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,9268	0,4275	0,0766	0,0057	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	6	0,9742	0,6070	0,1595	0,0172	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	7	0,9922	0,7608	0,2814	0,0435	0,0026	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	8	0,9980	0,8713	0,4315	0,0940	0,0081	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
	9	0,9995	0,9389	0,5888	0,1763	0,0214	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000
	10	0,9999	0,9744	0,7304	0,2915	0,0494	0,0029	0,0000	0,0000	0,0000
	11	1	0,9905	0,8407	0,4311	0,1002	0,0083	0,0002	0,0000	0,0000
	12	1	0,9969	0,9155	0,5785	0,1808	0,0212	0,0006	0,0000	0,0000
	13	1	0,9991	0,9599	0,7145	0,2923	0,0481	0,0021	0,0000	0,0000
n	x	p								
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
n=30	14	1	0,9998	0,9831	0,8246	0,4278	0,0971	0,0064	0,0001	0,0000
	15	1	0,9999	0,9936	0,9029	0,5722	0,1754	0,0169	0,0002	0,0000
	16	1	1	0,9979	0,9519	0,7077	0,2855	0,0401	0,0009	0,0000
	17	1	1	0,9994	0,9788	0,8192	0,4215	0,0845	0,0031	0,0000
	18	1	1	0,9998	0,9917	0,8998	0,5689	0,1593	0,0095	0,0000
	19	1	1	1	0,9971	0,9506	0,7085	0,2696	0,0256	0,0001
	20	1	1	1	0,9991	0,9786	0,8237	0,4112	0,0611	0,0005
	21	1	1	1	0,9998	0,9919	0,9060	0,5685	0,1287	0,0020
	22	1	1	1	1	0,9974	0,9565	0,7186	0,2392	0,0078
	23	1	1	1	1	0,9993	0,9828	0,8405	0,3930	0,0258
	24	1	1	1	1	0,9998	0,9943	0,9234	0,5725	0,0732
	25	1	1	1	1	1	0,9985	0,9698	0,7448	0,1755

	26	1	1	1	1	1	0,9997	0,9907	0,8773	0,3526
	27	1	1	1	1	1	1	0,9979	0,9558	0,5886
	28	1	1	1	1	1	1	0,9997	0,9895	0,8163
	29	1	1	1	1	1	1	1	0,9988	0,9576
	30	1	1	1	1	1	1	1	1	1
n=40	0	0,0148	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0805	0,0015	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,2228	0,0079	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,4231	0,0285	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,6290	0,0759	0,0026	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,7937	0,1613	0,0086	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	6	0,9005	0,2859	0,0238	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	7	0,9581	0,4371	0,0553	0,0021	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	8	0,9845	0,5931	0,1110	0,0061	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	9	0,9949	0,7318	0,1959	0,0156	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	10	0,9985	0,8392	0,3087	0,0352	0,0011	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	11	0,9996	0,9125	0,4406	0,0709	0,0032	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	12	0,9999	0,9568	0,5772	0,1285	0,0083	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	13	1	0,9806	0,7032	0,2112	0,0192	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000
	14	1	0,9921	0,8074	0,3174	0,0403	0,0012	0,0000	0,0000	0,0000
	15	1	0,9971	0,8849	0,4402	0,0769	0,0034	0,0000	0,0000	0,0000
	16	1	0,9990	0,9367	0,5681	0,1341	0,0083	0,0001	0,0000	0,0000
	17	1	0,9997	0,9680	0,6885	0,2148	0,0189	0,0003	0,0000	0,0000
n=40		p								
	x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
	18	1	0,9999	0,9852	0,7911	0,3179	0,0392	0,0009	0,0000	0,0000
	19	1	1	0,9937	0,8702	0,4373	0,0744	0,0024	0,0000	0,0000
	20	1	1	0,9976	0,9256	0,5627	0,1298	0,0063	0,0000	0,0000
	21	1	1	0,9991	0,9608	0,6821	0,2089	0,0148	0,0001	0,0000
	22	1	1	0,9997	0,9811	0,7852	0,3115	0,0320	0,0003	0,0000
	23	1	1	0,9999	0,9917	0,8659	0,4319	0,0633	0,0010	0,0000
	24	1	1	1	0,9966	0,9231	0,5598	0,1151	0,0029	0,0000
	25	1	1	1	0,9988	0,9597	0,6826	0,1926	0,0079	0,0000
	26	1	1	1	0,9996	0,9808	0,7888	0,2968	0,0194	0,0000
	27	1	1	1	0,9999	0,9917	0,8715	0,4228	0,0432	0,0001
	28	1	1	1	1	0,9968	0,9291	0,5594	0,0875	0,0004
	29	1	1	1	1	0,9989	0,9648	0,6913	0,1608	0,0015
	30	1	1	1	1	0,9997	0,9844	0,8041	0,2682	0,0051
	31	1	1	1	1	0,9999	0,9939	0,8890	0,4069	0,0155
	32	1	1	1	1	1	0,9979	0,9447	0,5629	0,0419
	33	1	1	1	1	1	0,9994	0,9762	0,7141	0,0995
	34	1	1	1	1	1	0,9999	0,9914	0,8387	0,2063
	35	1	1	1	1	1	1	0,9974	0,9241	0,3710
	36	1	1	1	1	1	1	0,9994	0,9715	0,5769
	37	1	1	1	1	1	1	0,9999	0,9921	0,7772
	38	1	1	1	1	1	1	1	0,9985	0,9195
	39	1	1	1	1	1	1	1	0,9999	0,9852
	40	1	1	1	1	1	1	1	1	1

الملحق رقم 2: الجداول المتعلقة بقانون بواسون

دالة التوزيع الاحتمالية لقانون بواسون $F(x) = P(X \le x) = \sum_{k \le x} e^{-\lambda} . \frac{\lambda^k}{k!}$

x	λ									
	0,5	**1**	**1,5**	**2**	**2,5**	**3**	**3,5**	**4**	**4,5**	**5**
0	0,6065	0,3679	0,2231	0,1353	0,0821	0,0498	0,0302	0,0183	0,0111	0,0067
1	0,9098	0,7358	0,5578	0,4060	0,2873	0,1991	0,1359	0,0916	0,0611	0,0404
2	0,9856	0,9197	0,8088	0,6767	0,5438	0,4232	0,3208	0,2381	0,1736	0,1247
3	0,9982	0,9810	0,9344	0,8571	0,7576	0,6472	0,5366	0,4335	0,3423	0,2650
4	0,9998	0,9963	0,9814	0,9473	0,8912	0,8153	0,7254	0,6288	0,5321	0,4405
5	1	0,9994	0,9955	0,9834	0,9580	0,9161	0,8576	0,7851	0,7029	0,6160
6	1	0,9999	0,9991	0,9955	0,9858	0,9665	0,9347	0,8893	0,8311	0,7622
7	1	1	0,9998	0,9989	0,9958	0,9881	0,9733	0,9489	0,9134	0,8666
8	1	1	1	0,9998	0,9989	0,9962	0,9901	0,9786	0,9597	0,9319
9	1	1	1	1	0,9997	0,9989	0,9967	0,9919	0,9829	0,9682
10	1	1	1	1	0,9999	0,9997	0,9990	0,9972	0,9933	0,9863
11	1	1	1	1	1	0,9999	0,9997	0,9991	0,9976	0,9945
12	1	1	1	1	1	1	0,9999	0,9997	0,9992	0,9980
13	1	1	1	1	1	1	1	0,9999	0,9997	0,9993
14	1	1	1	1	1	1	1	1	0,9999	0,9998
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,9999
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

x	λ									
	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10
0	0,0041	0,0025	0,0015	0,0009	0,0006	0,0003	0,0002	0,0001	0,0001	0,0000
1	0,0266	0,0174	0,0113	0,0073	0,0047	0,0030	0,0019	0,0012	0,0008	0,0005
2	0,0884	0,0620	0,0430	0,0296	0,0203	0,0138	0,0093	0,0062	0,0042	0,0028
3	0,2017	0,1512	0,1118	0,0818	0,0591	0,0424	0,0301	0,0212	0,0149	0,0103
4	0,3575	0,2851	0,2237	0,1730	0,1321	0,0996	0,0744	0,0550	0,0403	0,0293
5	0,5289	0,4457	0,3690	0,3007	0,2414	0,1912	0,1496	0,1157	0,0885	0,0671
6	0,6860	0,6063	0,5265	0,4497	0,3782	0,3134	0,2562	0,2068	0,1649	0,1301
7	0,8095	0,7440	0,6728	0,5987	0,5246	0,4530	0,3856	0,3239	0,2687	0,2202
8	0,8944	0,8472	0,7916	0,7291	0,6620	0,5925	0,5231	0,4557	0,3918	0,3328
9	0,9462	0,9161	0,8774	0,8305	0,7764	0,7166	0,6530	0,5874	0,5218	0,4579
10	0,9747	0,9574	0,9332	0,9015	0,8622	0,8159	0,7634	0,7060	0,6453	0,5830
11	0,9890	0,9799	0,9661	0,9467	0,9208	0,8881	0,8487	0,8030	0,7520	0,6968
12	0,9955	0,9912	0,9840	0,9730	0,9573	0,9362	0,9091	0,8758	0,8364	0,7916
13	0,9983	0,9964	0,9929	0,9872	0,9784	0,9658	0,9486	0,9261	0,8981	0,8645
14	0,9994	0,9986	0,9970	0,9943	0,9897	0,9827	0,9726	0,9585	0,9400	0,9165
15	0,9998	0,9995	0,9988	0,9976	0,9954	0,9918	0,9862	0,9780	0,9665	0,9513
16	0,9999	0,9998	0,9996	0,9990	0,9980	0,9963	0,9934	0,9889	0,9823	0,9730
17	1	0,9999	0,9998	0,9996	0,9992	0,9984	0,9970	0,9947	0,9911	0,9857
18	1	1	0,9999	0,9999	0,9997	0,9993	0,9987	0,9976	0,9957	0,9928
19	1	1	1	1	0,9999	0,9997	0,9995	0,9989	0,9980	0,9965
20	1	1	1	1	1	0,9999	0,9998	0,9996	0,9991	0,9984
21	1	1	1	1	1	1	0,9999	0,9998	0,9996	0,9993
22	1	1	1	1	1	1	1	0,9999	0,9999	0,9997
23	1	1	1	1	1	1	1	1	0,9999	0,9999
24	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

الملحق رقم 3: الجداول المتعلقة بالقانون الطبيعي المعياري

3.أ: جدول القانون الطبيعي المعياري:حالة قيمة z معلومة وقيمة P مجهولة

دالة التوزيع الاحتمالية للقانون الطبيعي المعياري

$$F(z) = P(Z \le z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} .dz$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
قيم دالة التوزيع من أجل القيم الكبيرة لـ z										
z	**3,0**	**3,1**	**3,2**	**3,3**	**3,4**	**3,5**	**3,6**	**3,8**	**4,0**	**4,5**
F(z)	0,99865	0,999032	0,999313	0,999517	0,999663	0,999767	0,999841	0,999928	0,999968	0,999997

3.ب: جدول القانون الطبيعي المعياري:حالة قيمة z مجهولة وقيمة P معلومة

قيم z المختلفة من أجل p معلوم، حيث: p=F(z)

p	0,000	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009	0,010	
0,00	∞	3,0902	2,8782	2,7478	2,6521	2,5758	2,5121	2,4573	2,4089	2,3656	2,3263	**0,99**
0,01	2,3263	2,2904	2,2571	2,2262	2,1973	2,1701	2,1444	2,1201	2,0969	2,0749	2,0537	**0,98**
0,02	2,0537	2,0335	2,0141	1,9954	1,9774	1,9600	1,9431	1,9268	1,9110	1,8957	1,8808	**0,97**
0,03	1,8808	1,8663	1,8522	1,8384	1,8250	1,8119	1,7991	1,7866	1,7744	1,7624	1,7507	**0,96**
0,04	1,7507	1,7392	1,7279	1,7169	1,7060	1,6954	1,6849	1,6747	1,6646	1,6546	1,6449	**0,95**
0,05	1,6449	1,6352	1,6258	1,6164	1,6072	1,5982	1,5893	1,5805	1,5718	1,5632	1,5548	**0,94**
0,06	1,5548	1,5464	1,5382	1,5301	1,5220	1,5141	1,5063	1,4985	1,4909	1,4833	1,4758	**0,93**
0,07	1,4758	1,4684	1,4611	1,4538	1,4466	1,4395	1,4325	1,4255	1,4187	1,4118	1,4051	**0,92**
0,08	1,4051	1,3984	1,3917	1,3852	1,3787	1,3722	1,3658	1,3595	1,3532	1,3469	1,3408	**0,91**
0,09	1,3408	1,3346	1,3285	1,3225	1,3165	1,3106	1,3047	1,2988	1,2930	1,2873	1,2816	**0,90**
0,10	1,2816	1,2759	1,2702	1,2646	1,2591	1,2536	1,2481	1,2426	1,2372	1,2319	1,2265	**0,89**
0,11	1,2265	1,2212	1,2160	1,2107	1,2055	1,2004	1,1952	1,1901	1,1850	1,1800	1,1750	**0,88**
0,12	1,1750	1,1700	1,1650	1,1601	1,1552	1,1503	1,1455	1,1407	1,1359	1,1311	1,1264	**0,87**
0,13	1,1264	1,1217	1,1170	1,1123	1,1077	1,1031	1,0985	1,0939	1,0893	1,0848	1,0803	**0,86**
0,14	1,0803	1,0758	1,0714	1,0669	1,0625	1,0581	1,0537	1,0494	1,0450	1,0407	1,0364	**0,85**
0,15	1,0364	1,0322	1,0279	1,0237	1,0194	1,0152	1,0110	1,0069	1,0027	0,9986	0,9945	**0,84**
0,16	0,9945	0,9904	0,9863	0,9822	0,9782	0,9741	0,9701	0,9661	0,9621	0,9581	0,9542	**0,83**
0,17	0,9542	0,9502	0,9463	0,9424	0,9385	0,9346	0,9307	0,9269	0,9230	0,9192	0,9154	**0,82**
0,18	0,9154	0,9116	0,9078	0,9040	0,9002	0,8965	0,8927	0,8890	0,8853	0,8816	0,8779	**0,81**
0,19	0,8779	0,8742	0,8705	0,8669	0,8633	0,8596	0,8560	0,8524	0,8488	0,8452	0,8416	**0,80**
0,20	0,8416	0,8381	0,8345	0,8310	0,8274	0,8239	0,8204	0,8169	0,8134	0,8099	0,8064	**0,79**
0,21	0,8064	0,8030	0,7995	0,7961	0,7926	0,7892	0,7858	0,7824	0,7790	0,7756	0,7722	**0,78**
0,22	0,7722	0,7688	0,7655	0,7621	0,7588	0,7554	0,7521	0,7488	0,7454	0,7421	0,7388	**0,77**
0,23	0,7388	0,7356	0,7323	0,7290	0,7257	0,7225	0,7192	0,7160	0,7128	0,7095	0,7063	**0,76**
0,24	0,7063	0,7031	0,6999	0,6967	0,6935	0,6903	0,6871	0,6840	0,6808	0,6776	0,6745	**0,75**
0,25	0,6745	0,6713	0,6682	0,6651	0,6620	0,6588	0,6557	0,6526	0,6495	0,6464	0,6433	**0,74**
0,26	0,6433	0,6403	0,6372	0,6341	0,6311	0,6280	0,6250	0,6219	0,6189	0,6158	0,6128	**0,73**
0,27	0,6128	0,6098	0,6068	0,6038	0,6008	0,5978	0,5948	0,5918	0,5888	0,5858	0,5828	**0,72**
0,28	0,5828	0,5799	0,5769	0,5740	0,5710	0,5681	0,5651	0,5622	0,5592	0,5563	0,5534	**0,71**
0,29	0,5534	0,5505	0,5476	0,5446	0,5417	0,5388	0,5359	0,5330	0,5302	0,5273	0,5244	**0,70**
0,30	0,5244	0,5215	0,5187	0,5158	0,5129	0,5101	0,5072	0,5044	0,5015	0,4987	0,4959	**0,69**
0,31	0,4959	0,4930	0,4902	0,4874	0,4845	0,4817	0,4789	0,4761	0,4733	0,4705	0,4677	**0,68**
0,32	0,4677	0,4649	0,4621	0,4593	0,4565	0,4538	0,4510	0,4482	0,4454	0,4427	0,4399	**0,67**
0,33	0,4399	0,4372	0,4344	0,4316	0,4289	0,4261	0,4234	0,4207	0,4179	0,4152	0,4125	**0,66**
0,34	0,4125	0,4097	0,4070	0,4043	0,4016	0,3989	0,3961	0,3934	0,3907	0,3880	0,3853	**0,65**
0,35	0,3853	0,3826	0,3799	0,3772	0,3745	0,3719	0,3692	0,3665	0,3638	0,3611	0,3585	**0,64**
0,36	0,3585	0,3558	0,3531	0,3505	0,3478	0,3451	0,3425	0,3398	0,3372	0,3345	0,3319	**0,63**
0,37	0,3319	0,3292	0,3266	0,3239	0,3213	0,3186	0,3160	0,3134	0,3107	0,3081	0,3055	**0,62**
0,38	0,3055	0,3029	0,3002	0,2976	0,2950	0,2924	0,2898	0,2871	0,2845	0,2819	0,2793	**0,61**
0,39	0,2793	0,2767	0,2741	0,2715	0,2689	0,2663	0,2637	0,2611	0,2585	0,2559	0,2533	**0,60**
0,40	0,2533	0,2508	0,2482	0,2456	0,2430	0,2404	0,2378	0,2353	0,2327	0,2301	0,2275	**0,59**
0,41	0,2275	0,2250	0,2224	0,2198	0,2173	0,2147	0,2121	0,2096	0,2070	0,2045	0,2019	**0,58**
0,42	0,2019	0,1993	0,1968	0,1942	0,1917	0,1891	0,1866	0,1840	0,1815	0,1789	0,1764	**0,57**
0,43	0,1764	0,1738	0,1713	0,1687	0,1662	0,1637	0,1611	0,1586	0,1560	0,1535	0,1510	**0,56**
0,44	0,1510	0,1484	0,1459	0,1434	0,1408	0,1383	0,1358	0,1332	0,1307	0,1282	0,1257	**0,55**
0,45	0,1257	0,1231	0,1206	0,1181	0,1156	0,1130	0,1105	0,1080	0,1055	0,1030	0,1004	**0,54**
0,46	0,1004	0,0979	0,0954	0,0929	0,0904	0,0878	0,0853	0,0828	0,0803	0,0778	0,0753	**0,53**
0,47	0,0753	0,0728	0,0702	0,0677	0,0652	0,0627	0,0602	0,0577	0,0552	0,0527	0,0502	**0,52**
0,48	0,0502	0,0476	0,0451	0,0426	0,0401	0,0376	0,0351	0,0326	0,0301	0,0276	0,0251	**0,51**
0,49	0,0251	0,0226	0,0201	0,0175	0,0150	0,0125	0,0100	0,0075	0,0050	0,0025	0,0000	**0,50**
	0,010	**0,009**	**0,008**	**0,007**	**0,006**	**0,005**	**0,004**	**0,003**	**0,002**	**0,001**	**0,000**	**p**

قائمة المراجع

1. قائمة المراجع باللغة العربية
2. قائمة المراجع باللغة الأجنبية

أولا:الكتب باللغة العربية:

- أنيس إسماعيل كنجو ، **الإحصاء والاحتمال** ، الطبعة الأولى، مكتبة العبيكان، الرياض،2000.
- أحمد عامر عامر،**محاضرات وتمارين في الإحصاء 2:في حساب الاحتمالات ومبادئ الإحصاء الرياضي**،دار الغرب للنشر والتوزيع،الجزائر،2002.
- حسن ياسين طعمة وإيمان حسين حنوش،**الإحصاء الاستدلالي**،الطبعة الثانية،دار صفاء للنشر والتوزيع،عمان،2015.
- عبد اللطيف الطراونة عوض،**الإحصاء التطبيقي**، الطبعة الأولى، دار الخليج،عمان،2018.
- سالم عيسى بدر وعماد غصاب عبابنة،**مبادئ الإحصاء الوصفي والاستدلالي**، الطبعة الأولى،دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة،عمان،2007.
- كمال بوعظم،**الإحصاء الاستدلالي:من الجانب النظري والتطبيقي**،الطبعة الأولى،دار زهران للنشر والتوزيع،عمان،2013.
- لحسن عبد الله باشيوة،**مقدمة في الاحتمالات**، الطبعة الأولى،دار الوراق للنشر والتوزيع،عمان،2014.
- كمال سلطان محمد سالم، **الإحصاء الاحتمالي**، الطبعة الأولى، الدار الجامعية، الإسكندرية، 2004.
- محمد يوسف أشقر وعبد اللطيف يوسف الصديقي،**أساسيات الإحصاء والاحتمالات**، الطبعة الأولى،دار الراتب الجامعية،بيروت،2001.
- جبار عبد مضحي،**مقدمة في نظرية الاحتمالات**، الطبعة الأولى، دار المسيرة للنشر والتوزيع، الأردن، 2011.
- عبد النور موساوي ويوسف بركان، **الإحصاء2**، دار العلوم للنشر والتوزيع، الجزائر ، 2010.
- مبارك اسبر ديب، **مبادئ في الاحتمالات والإحصاء**، جامعة تشرين ، سوريا ، 2009.
- مجدي الطويل، **نظرية الإحتمالات :النظرية والتطبيق**، دار النشر للجامعات، مصر ، 2009.
- مديحة السيد محمد موسى، **أساسيات الإحصاء الرياضي وتطبيقاتها**، دار الكتاب الحديث، مصر،2008.
- مصطفى عبد الحفيظ، **نظرية الاحتمالات – مبادئ وتطبيقات**، الجزء الأول، الطبعة الثالثة، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2008.
- موراي سبيجل وجون شيلر وألو سرينيفاسان،**الاحتمالات والإحصاء: سلسلة ملخصات شوم**، ترجمة: محمود علي أبو النصر ومصطفى جلال مصطفى، الطبعة الأولى، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر،2004.
- موراي شبيجل، **الإحصاء : سلسلة ملخصات شوم**، ترجمة: شعبان عبد الحميد شعبان، الطبعة السابعة، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر،2004.

ثانيا:المطبوعات:

- ساعد بن فرحات وعبد الحميد قطوش،**مطبوعة تحت عنوان:ملخص الإحصاء 2- مدعم بتمارين وامتحانات محلولة-** ،كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير،جامعة سطيف2014،1-2015.

- صالح بوعبد الله، **مطبوعة تحت عنوان: محاضرات الإحصاء الرياضي**،كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير،جامعة محمد بوضياف – المسيلة –،2005-2006.

ثالثا: الكتب باللغة الأجنبية:

- Foata. D, Fuchs. A**, Calcul des Probabilités,** 2éme édition, Dunod, Paris, 1998.
- Khaldi Khaled, **Méthodes Statistiques: rappel de cours – exerices corrigés**, OPU, Alger,2005.
-Lecoutre .J-P**, Statistique Et Probabilités,** 4éme édition, Dunod, Paris, 2008.
-Khaldi Khaled, **Probabilités**, OPU, Alger, 1994.
-Charles M. Grinstead and J. Laurie Snell, **Introduction to Probability**, Swarthmore College, 2005.
-Dimitri P. Bertsekas and John N. Tsitsiklis, **Introduction to Probability: Problem Solutions**, 2nd edition, Massachusetts Institute of Technology, 2015.
-Dimitri P. Bertsekas and John N. Tsitsiklis, **Introduction to Probability**, Massachusetts Institute of Technology, 2000.
-Dirk P. Kroese, **A Short Introduction to Probability**, The University of Queensland,2009.
- F.M. Dekking, Kraaikamp, H.P. Lopuhaa,¨ L.E. Meester, **A Modern Introduction to Probability and Statistics, Understanding Why and How**, Springer-Verlag London Limited, 2005.
- Heather Haney and Ernest Johnson, **Probability and Statistics**, 4th edition, CK-12 Foundation, 2011.
- Hwei P. Hsu, **Theory and Problems of Probability, Random Variables, and Random Processes, Schaum's Outline**, The McGraw-Hill Companies, 1997.
- Kai Lai Chung, **A Course in Probability Theory**, 3rd edition, Academic Press, 2001.
- Miroslav Lovri, **Students' Solutions Manual Probability and Statistics**, McMaster University, 2011.
- Rick Durrett, **Probability: Theory and Examples**, 4th edition, Cambridge University Press, 2013.
- Sheldon Ross, **A first course in probability**, 8th edition. Pearson Prentice Hal, 2010.
- Sheldon Ross, **Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists**, 3rd edition, Elsevier Academic Press, 2004.
- Sheldon Ross, **Introduction to Probability Models**, 10th edition, Academic Press is an Imprint of Elsevier, 2010.