الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التّعليم العالي والبحث العلميّ
جامعة سطيف-1-
كلّيّة العلوم الاقتصاديّة والتّجاريّة وعلوم التّسيير

Ministry of Higher Education and Scientific Research
UNIVRSITY- STIF1
Faculty of Economic Commerce and Management

قسم: العلوم الإقتصادية

محاضرات في مقياس الإحصاء 3

مطبوعة بيداغوجية موجهة لطلبة السنة الثانية ليسانس L.M.D جذع مشترك

إعداد الدكتورة: بوعروري فاطمة

الخبراء المقيمين للمطبوعة:

- الدكتور: سحنون فاروق
- الدكتور: قطوش عبد الحميد

تاريخ اعتماد المطبوعة: 2022 - 2023

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

Ministry of Higher Education
and Scientific Research
UNIVRSITY- STIF1
Faculty of Economic Commerce
and Management

وزارة التّعليم العالي والبحث العلميّ
جامعة سطيف-1-
كلّيّة العلوم الاقتصاديّة والتّجاريّة وعلوم التّسيير

قسم: العلوم الإقتصادية

محاضرات في مقياس الإحصاء 3

مطبوعة بيداغوجية موجهة لطلبة السنة الثانية ليسانس L.M.D جذع مشترك

إعداد الدكتورة: بوعروري فاطمة

الخبراء المقيمين للمطبوعة:

- الدكتور: سحنون فاروق
- الدكتور: قطوش عبد الحميد

تاريخ اعتماد المطبوعة: 2022 - 2023

السداسي: الثالث
وحدة التعليم : المنهجية
المادة : احصاء 3
الرصيد: 3
المعامل: 2

جامعة سطيف 1 - قسم العلوم الإقتصادية (2) - كلية العلوم الإقتصادية و التجارية و علوم التسيير

أهداف التعليم
الإلمام بمبادئ الإحصاء التطبيقي بدءا بالمعاينة، التقدير بالنقطة و بمجال ثقة وصولا إلى الاختبارات الإحصائية.

المعارف المسبقة المطلوبة
الاحصاء 1 و 2

محتوى المادة:

1- توزيع المعاينة (مفاهيم، توزيعات المعاينة، تقييم المقدر النقطي) .
2- مجال الثقة (عينة طبيعية، مجال الثقة، مجال الثقة للتباين، عينة غير طبيعية، مجال الثقة المتوسط ، مجال الثقة بين المتوسطين، مجال الثقة للنسبة بين تباينين) .
3- الاختبارات الإحصائية (مقدمة واختبار غوص، اختبار ستودنت...تحليل الانحدار وتقديم المعالم .

طريقة التقييم:
مستمر و امتحان

المراجع:

1- حسن ياسين طعمة، أساليب الإحصاء التطبيقي، دار صفاء، 2010
2- عبد الحميد عبد المجيد البلداوي ، أساليب الإحصاء للعلوم الاقتصادية وإدارة الأعمال مع استخدام برنامج SPSS، دار وائل، عمان، 2010.
3- المحمدي شاكر مصلح، " الإحصاء وتصميم الاختبارات "، دار أسامة للنشر، عمان، 2011
4- ANDERSON, SWEENEY et WILLIAMS : Statistiques pour l'économie et la gestion, Editions De Boeck, 2010
5- GHARBI M.N. :Statistiques et probabilités, cours et applications informatique , Editions Menouba, Tunis 2011

المقدمـــــة

تمثل الأساليب الإحصائية الطريقة المنطقية والرشيدة لدراسة الظواهر المختلفة وتحليلها والتنبؤ بسلوكها في المستقبل فهي الأسلوب العلمي للتعبير الكمي والنوعي عن الظواهر، بناء على تحليل موضوعي للمعلومات المتاحة بداية من ملاحظتها إلى تحليلها وتوقعها، وقد تطورت هذه الأساليب الإحصائية بحيث أصبحت قادرة على التعامل مع مختلف المشاكل التي تواجهها وهي بذلك أداة أساسية لتفعيل مبادئ الإدارة الرشيدة سواء على مستوى القطاعات الحكومية أو الخاصة، بتوفير البيانات والمؤشرات الدقيقة للوقوف على الأبعاد الحقيقية للقرارات والقضايا، من هنا تبرز أهمية دراسة مقياس الإحصاء 3 الذي يهدف لتمكين الطلبة من هذه الأساليب الإحصائية بغرض القيام بدراساتهم الميدانية في أبحاثهم ومذكرات تخرجهم وكذا التعامل مع مختلف المشاكل التي تواجههم في الحياة العملية.

هذه المطبوعة عبارة عن محاضرات في الإحصاء 3 وحسب مقرر التدريس المحدد من قبل وزارة التعليم العالي الجزائرية، يتم التدرج في تدريس علم الاحصاء على ثلاث مراحل كما يلي: الاحصاء الوصفي الذي يختص بتلخيص وتوصيف مجموعة من البيانات ويسمى بالإحصاء1 والذي يتم تدريسه خلال السداسي الأول لطلبة السنة أولى جدع مشترك، والاحصاء 2 خلال السداسي الثاني والذي يعني بنظرية الاحتمالات والتي تعتبر عنصرا أساسيا في الاستدلال الاحصائي، حيث تساعد نظرية الاحتمالات على تفسير وتحليل المعطيات بشكل أفضل، وأخيرا الإحصاء 3 وهو موجه لطلبة السنة ثانية (علوم اقتصادية، علوم التسيير، علوم تجارية، والعلوم المالية) خلال السداسي الثالث.

تضم هذه المطبوعة دروسا لمقياس احصاء3 مدعمة بأمثلة محلولة بهدف مساعدة الطلبة على الالمام بمبادئ الإحصاء التطبيقي بدء بالمعاينة، التقدير بنقطة وبمجال ثقة وصولا إلى الاختبارات الإحصائية، وقد تم الحرص في تقديمها على بساطة العرض، بأسلوب سهل ومختصر دون اللجوء إلى البراهين والعمليات الرياضية المعقدة. وهي مُوجهة أساسًا لطلبة السنة الثانية جذع مشترك قسم العلوم الاقتصادية والتي تصُب في إطار المنهاج الوزاري المقرر لهم، وقد احتوت هذه المطبوعة على ثلاثة محاور أساسية وفق ما هو محدد في المقرر الوزاري وهي كالتالي:

المحور الأول: توزيع المعاينة؛

المحور الثاني: مجال الثقة؛

المحور الثالث: الاختبارات الإحصائية للفرضيات.

المحور الأول:

توزيع المعاينة

تمهيد:

تعتمد الدراسات الاحصائية والتي قد تكون بحوثا في مجال الأعمال أو القضايا الطبية أو التعليمية أو البيئية أو قطاع المواصلات أو في القضايا السياسية أو في قضايا أخرى على جمع البيانات المتعلقة بمشكلة أو ظاهرة ما فالبيانات تُمثل المادة الأساسية في أي دراسة إحصائية، وعلى هذا الأساس تُعتبر مرحلة جمعها من أهم مراحل البحث العلمي بالأسلوب الإحصائي وترتبط دقة ومصداقية البيانات المستخدمة بدقة وفعالية هذه المرحلة والتي تعتمد عليها كل مراحل التحليل الإحصائي اللاحقة، مما يؤثر على أهمية النتائج المستخرجة وجودة القرارات المتخذة عل أساس هذه النتائج، أخذا بعين الاعتبار الظروف المحيطة بالبحث، فكلما كان جمع البيانات دقيقا زادت ثقة الباحث في الاعتماد عليها وفي النتائج المتحصل عليها وتعتمد جودة البيانات على منهجية وطريقة جمعها ويتم ذلك باستخدام أسلوبين إحصائيين إما الحصر الشامل أو المعاينة.

I. أساليب جمع البيانات الإحصائية:

تتطلب مرحلة جمع البيانات تحديد الأسلوب المناسب لجمعها لهذا سنتطرق في هذا العنصر إلى أهم أنواع هذه الأساليب والمعايير المستخدمة لاختيار أنسبها.

1. أنواع الأساليب الإحصائية:

تختلف أساليب جمع البيانات باختلاف الهدف من الدراسة وطبيعة المجتمع المدروس وإمكانات البحث، عموما يمكن تقسيم أساليب جمع البيانات إلى:

1.1 أسلوب الحصر الشامل:

الحصر الشامل هو الدراسة الشاملة لجميع وحدات المجتمع الإحصائي، بهدف الحصول على معلومات إحصائية شاملة لخاصية أو أكثر من خواص المجتمع، ومن ثم إجراء التحاليل المنهجية اللازمة،[1] ويتطلب هذا النوع من الدراسات وقتا طويلا، تكاليف بشرية، مالية ومادية كبيرة لتنفيذها وجهوداً ضخمة لإتمامها، لذلك يتم تنظيمه عادة على فترات متباعدة كما هو الحال في التعداد العام للسكان والذي ينظم على فترات دورية منتظمة، عادة كل عشر سنوات في معظم أقطار العالم،[2] حيث تزداد متطلبات القيام بالحصر الشامل وتتضاعف كلما ازداد حجم المجتمع، وقد يكون من المستحيل أو من غير المعقول استعمال طريقة المسح الشامل لارتفاع التكلفة أو الحاجة للجهد أو الزمن أو لطبيعة المجتمع المدروس لذا تتجه معظم البحوث الاحصائية إلى استخدام أسلوب آخر وهو أسلوب الدراسة غير الشاملة من خلال دراسة جزء من المجتمع.

[1] ANSION Guy, Sondages et statistique, labor éditions, Bruxelles, 1997, p 11
[2] HAMDANI Hocine, statistique descriptive, office des publications universitaires, Alger, 2001, p 9.

2.1 أسلوب المعاينة:

يعتبر أسلوب المعاينة من أفضل الطرق العلمية المستخدمة في البحوث الإحصائية في المجالات كافة ويهدف إلى تقدير المعالم الرئيسة للمجتمع من خلال بيانات أخذت من عينة ممثلة للمجتمع، أي تتوافر فيها خصائص المجتمع الأصلي، ويرتبط تمثيل العينة للمجتمع بعوامل عديدة كحجم العينة، تباين خصائص المجتمع، طريقة اختيار العينة، الطريقة المعتمدة في تصميم العينة وغيرها من العوامل الأخرى.

2. معايير اختيار الأسلوب الاحصائي المناسب:

تحديد الأسلوب المناسب لجمع البيانات الإحصائية يتم وفقا لمعايير محددة كما يلي:[1]

- **طبيعة المجتمع :**

يقصد بطبيعة المجتمع حجم المجتمع (عدد مفرداته) وإمكانية تلف مفرداته من جراء عملية الحصر، قد يكون مجتمع الدراسة محدودا يمكن حصره ومعرفة عدد مفرداته، وقد يكون غير محدود لا يمكن حصره ومعرفة عدد مفرداته، كما أن بعض المجتمعات يؤدي حصرها كلية إلى تلف مفرداتها، وعلى أساس طبيعة المجتمع يتحدد الأسلوب الملائم للدراسة.

- **الهدف من الدراسة :**

إذا كان الهدف من الدراسة هو الحصول على بيانات إحصائية شاملة عن وحدات المجتمع الإحصائي المدروس يكون من الضروري استخدام أسلوب الحصر الشامل، مثل التعدادات السكانية التي تهدف إلى حصر ودراسة خصائص كل أفراد المجتمع. أما إذا كان الهدف من الدراسة هو جمع بيانات جزئية عن خصائص معينة لمجتمع ما يكون استخدام أسلوب المعاينة هو المناسب، ويتم ذلك وفقا لشروط وإجراءات وأسس علمية محددة بهدف استقراء خصائص المجتمع الكلي وفق درجة معينة من الدقة.

- **مدى تجانس الوحدات الإحصائية :**

يقصد بالتجانس تطابق الخصائص بين وحدات العينة، فإذا كانت وحدات المجتمع المدروس متجانسة من حيث خصائص وطبيعة ونوعية الدراسة المراد القيام بها بشكل كبير، فأسلوب المعاينة هو الأسلوب المناسب للدراسة فلا مبرر لدراسته بطريقة الحصر الشامل، لأن ذلك يعتبر مضيعة للوقت والجهد والمال، فعينة صغيرة تكفي لدراسته.

---

[1] أنظر كل من:
- عدنان شهاب حمد ومهدي محسن إسماعيل، أساليب المعاينة في ميدان التطبيق، المعهد العربي للتدريب والبحوث الإحصائية، العراق، ص 14
- إبراهيم علي إبراهيم عبد ربه، مبادئ علم الإحصاء، الدار الجامعية، مصر، 2002، ص 13.

- **الدقة المطلوبة والوقت المخصص للبحث :**

ترتبط دقة البيانات المطلوبة بالدراسة الكلية للمجتمع الإحصائي المدروس، أما إذا كان البحث مقيدا بالوقت فلا بد من التضحية بجزء من الدقة أو ما يسمى بهامش الخطأ، من خلال دراسة عينة ممثلة للمجتمع لأن أسلوب المعاينة هو الأكثر ملائمة مع معايير الحاجة إلى البيانات المناسبة في الوقت المناسب.

- **الإمكانات المالية والبشرية المتوفرة :**

يتطلب الحصر الشامل تكاليف مالية وبشرية معتبرة تكون في غالب الأحيان العائق أمام هذا النوع من الدراسات، وبالتالي يعتبر أسلوب المعاينة الأسلوب الأنسب في حالة محدودية ميزانية البحث فوفقا للميزانية المقررة للدراسة يحدد الأسلوب المناسب.

II. مفاهيم إحصائية مرتبطة بالمعاينة:

تهتم نظرية العينات بدراسة العلاقة بين المجتمع والعينات المسحوبة منه فيما يسمى بالاستدلال الإحصائي وهو عبارة عن مجموعة الطرق العلمية التي تعمل للاستدلال على المجتمع بناء على البيانات الإحصائية التي جمعت من عينة من هذا المجتمع وفق طرق إحصائية محددة، وتشمل على عدد من المفاهيم سنتطرق لأهمها فيما يلي:

1. مفهوم المجتمع الاحصائي، الوحدة الإحصائية والعينة:

- **المجتمع الاحصائي:**

المجتمع الإحصائي هو جميع الوحدات أو العناصر التي تشكل مجال دراسة معينة، تجمعها خاصية أو خصائص عامة مشتركة تميزها عن غيرها من المجتمعات، قد يتكون المجتمع من عدد السائحين أو الناخبين في دولة ما، إنتاج أحد المصانع لمنتج معين في فترة زمنية معينة أو مباني و مؤسسات وغيرها، حسب مجال وموضوع الدراسة، يُطلق على عدد الوحدات التي يتضمنها المجتمع الاحصائي مصطلح حجم المجتمع ويرمز له بالرمز N،[1] والهدف الرئيسي من تحديد المجتمع الاحصائي هو تعيين الحدود الصريحة لعملية جمع البيانات من جهة وكذلك لعملية الاستقراء أو الاستنتاجات التي يمكن الحصول عليها من خلال إجراء الدراسة من جهة ثانية.

- **الوحدة الإحصائية:**

الوحدة الإحصائية هي المفردة الأساسية من المفردات التي تشكل المجتمع الإحصائي المدروس والمطلوب جمع البيانات الإحصائية عنها وفقا لإطار محدد بخاصية وزمان ومكان معين.

---

[1] حسن ياسين طعمة وإيمان حسين حنوش. الإحصاء الاستدلالي. الطبعة الأولى، دار صفاء للنشر والتوزيع: عمان، 2018، ص.181. بتصرف

- **العينة:** [1]

العينة عبارة عن مجموعة جزئية من المجتمع والذي يتم اختياره بطريقة علمية يراعى فيها أن تكون عينة ممثلة للمجتمع بحيث تكون صورة مصغرة عن المجتمع الذي أخذت منه تحمل كل صفاته التي تميزه عن باقي المجتمعات ونرمز لحجم العينة بـ n حيث $n < N$ ويمكن تقسيم العينات من حيث الحجم إلى:

- عينات صغيرة: $n < 30$ وهي العينة التي يكون حجمها أو عدد مفرداتها أقل من 30 مفردة وهذا النوع له أساليب تحليل إحصائي خاصة به.
- عينات كبيرة: $n \geq 30$ وهي العينات التي يساوي أو يزيد عدد مفرداتها عن 30 مفردة

يمكن اختيار أكثر من عينة من المجتمع الاحصائي بطرق مختلفة لكل منها خصائص معينة وتوجد حالات يفضل فيها استخدام نوع معين دون الآخر، وللحصول على تقديرات واستدلالات دقيقة عن المجتمع محل الدراسة لابد من الاهتمام بطرق اختيار العينة حتى نحصل على نتائج دقيقة وقريبة من الواقع يمكن استخدامها.[2]

- **معالم المجتمع:**

يقصد بالمعالم تلك المؤشرات المحسوبة من بيانات المجتمع أخذا بعين الاعتبار كل وحدات هذا المجتمع، أي أن الدراسة هنا تكون شاملة، وتتمثل معالم المجتمع أساسا في متوسطه الذي يرمز له عادة بـ μ، نسبة المجتمع p، انحرافه المعياري σ وتباينه σ^2.

- **إحصائيات عينة:**

تتمثل إحصائيات العينة في تلك القيم المحسوبة من بيانات العينة والتي تعتبر تقريبا لتلك التي تقابها في المجتمع، حيث يُستدل بها على هذه المعالم التي تكون عادة مجهولة وهي متوسط العينة $\bar{x}$، نسبة العينة f، الانحراف المعياري للعينة s وتباينها s^2.

ملاحظة:

بما أننا نستطيع سحب أكثر من عينة من نفس المجتمع فإن قيمة الإحصائية عبارة عن متغير ومادام السحب يتم عشوائيا فإن الإحصائية عبارة عن متغير عشوائي وهذا هو الفرق بين المعلمة والإحصائية فالمعلمة قيمة ثابتة بينما الإحصائية متغير عشوائي قيمته تعتمد على العينة المسحوبة.

2. مراحل تصميم عينة:

لتصميم عينة ينبغي الالتزام بعدة خطوات أساسية يمكن حصرها فيما يلي:[3]

---

[1] حسين علوان مطلق، جمع البيانات وطرق المعاينة، الطبعة الأولى، مكتبة العبيكان للنشر، السعودية، 2009، ص 28. بتصرف

[2] ARDILLY Pascal, "Les techniques de sondage", édition Technip, Paris, 1994, p. 7

[3] انظر كل من: بتصرف

- **تحديد مشكلة وهدف الدراسة:**

تُعد هذه الخطوة من المراحل الهامة في أي دراسة أيا كان نوعها، فتعريف المشكلة المطروحة وتحديد الهدف تحديدا دقيقا يمكننا من تحديد متطلبات ومستلزمات الدراسة من متغيرات الدراسة ومن طبيعة وحجم البيانات المطلوبة وكذا المجتمع الإحصائي المستهدف وغيرها من المتطلبات التي تشكل الإطار العام للدراسة، والجوانب التي تساعدنا في تحقيق الهدف المطلوب والإجابة على إشكاليات الموضوع المدروس؛

- **تعريف وتحديد المجتمع المراد معاينته:**

ينبغي تعريف المجتمع المراد معاينته تعريفا دقيقا مع تحديد عناصره بحيث يمكن الحكم على انتماء كل عنصر إلى المجتمع من عدمه بكل سهولة، كما يجب تحديد الفترة الزمنية المراد فيها إجراء هذه الدراسة؛

- **تحديد البيانات المطلوب جمعها:**

تتضمن هذه المرحلة تحديد طبيعة وحجم البيانات المطلوبة للدراسة وفقا لموضوعها وهدفها فرضياتها ويجب أن يستهدف الباحث جمع بيانات محددة تخدم متطلبات الدراسة، وأن يأخذ بعين الاعتبار الدراسات السابقة المرتبطة بالموضوع والتي قد تتضمن المعلومات التي نبحث عنها بهدف حصر البيانات الضرورية وتجنب تكرار جمع بيانات تم التطرق إليها في البحوث السابقة كذلك الوقوف على أهم سلبياتها وإيجابياتها والعراقيل التي واجهتها، والاستفادة منها في تحديد بعض المؤشرات الإحصائية وهذا ما يجنبنا تكاليف إضافية ويساعدنا على تطوير جوانب وإشكاليات الدراسة، وتحديد أسلوب المعاينة الذي سيستخدم لاختيار وحدات العينة وتحديد طرق التحليل التي سيتم اتباعها؛

- **تحديد الإطار:**

وهو حصر شامل لجميع مفردات المجتمع المراد بحثه، قد يكون الإطار عبارة عن قائمة بالمفردات أو مجموعة من البطاقات أو الخرائط وغيرها، أي قائمة تضم كل وحدات المجتمع المدروس.

- **تحديد درجة الدقة المطلوبة وحجم العينة:**

-TILLE Yves, théorie des sondages, Echantillionnage et estimation en populations finies», Dunod, Paris, 2001, p 2
- ANSION Guy, Sondages et statistique, labor éditions, Bruxelles, 1997, P 15
- ARDILLY Pascal, Les techniques de sondage, édition Technip, Paris, 1994, P 25

تخضع نتائج المعاينة إلى أخطاء المعاينة وهي الأخطاء الناتجة عن جزئية المعلومات وأخطاء القياس لذا فإن الدراسات التي تستخدم أسلوب المعاينة تتطلب تحديد حجم العينة بما يتناسب مع درجة الدقة المطلوبة والميزانية المتاحة وعلى تباين المجتمع الذي يحدد بالرجوع إلى الدراسات السابقة أو إجراء اختبار مسبق على ذلك المجتمع ، وهذا لتحديد نسبة الخطأ المسموح به في قبول النتائج وتعميمها على المجتمع الكلي ويعتمد ذلك على خبرة الباحث أو الإحصائي وعلى الدراسات السابقة وكذلك على تطبيق بعض القواعد الإحصائية الخاصة بنظرية المعاينة؛

- **تحديد طريقة جمع وقياس البيانات:**

يجب على الباحث أن يحدد الطريقة الأنجع التي تستخدم لجمع البيانات ومن أهمها:

- القياس المباشر: وذلك بإجراء القياسات اللازمة لتحديد الخاصة المراد دراستها في وحدات العينة؛
- الاتصال المباشر: كالمقابلة الشخصية وتوجيه أسئلة مباشرة للوحدات المختارة في العينة؛
- الاتصال غير المباشر: وذلك عن طريق توجيه الأسئلة عن الهاتف الفاكس البريد الإلكتروني وغيرها.

ويمكن استخدام هذه الطرق مقترنة مع بعض إلا أن طريقتي القياس والاتصال المباشر هما أضمن الطرق من حيث الحصول على بيانات مقبولة، مع العلم أنها أكثر تكلفة من طريقة الاتصال غير المباشر.

- **إجراء اختبار مسبق:**

قبل البدء في توزيع استمارة البحث على كل وحدات العينة المطلوبة يفضل إجراء اختبار أولي لعينة صغيرة من المجتمع المدروس، فرغم التزام الباحث بكل متطلبات الاستمارة الجيدة وحرصه على صياغتها بشكل مناسب إلا أنه لا بد من اختبارها، حتى يمكن اكتشاف نقاط الضعف والعمل على تصحيحها ويفيد هذا الاختبار في تقييم القيمة العملية للاستمارة كما أنه يفيد في تسهيل الكثير من الصعوبات التي سيواجهها الباحث عند إجراء البحث.

- **العمل الميداني (جمع البيانات من وحدات العينة):**

يتم في بداية هذه المرحلة تدريب وتكوين القائمين بالعمل الميداني لتجنب الكثير من أخطاء القياس، حيث ترتبط دقة النتائج كثيرا بجودة هذه المرحلة. لذلك يجب الاهتمام بإعداد وتكوين القائمين بالعمل الميداني ووضع الخطط الملائمة لمعالجة حالات عدم الاستجابة أو عدم الحصول على البيانات من بعض وحدات العينة، ثم

يتم بعد ذلك التنفيذ الفعلي لخطة المعاينة بجمع البيانات من مفردات العينة المختارة وهي مرحلة هامة لأنها عرضة لكثير من أخطاء القياس

- **تحليل البيانات وتقدير معالم المجتمع :**

بعد الحصول على نتائج المعاينة والمتمثلة في إحصاءات العينة يتم دراستها وتحليلها بهدف الاستدلال على خصائص المجتمع، وهو أحد أهم فروع نظرية المعاينة والذي يشمل فرعين التقدير واختبار الفرضيات، بهدف الوصول إلى نتائج تمكن من تفسير الظاهرة المدروسة بدرجة معينة من الدقة.

3. أنواع المعاينة الاحصائية:

المعاينة هي عملية اختيار جزء من وحدات المجتمع الإحصائي المدروس والذي يطلق عليه المجتمع المرجعي أو المجتمع الهدف بطريقة علمية محددة للاستدلال على خواص المجتمع،[1] وتصنف المعاينة بناء على كيفية سحب العينة إلى نوعين رئيسين هما المعاينة العشوائية (الاحتمالية) والمعاينة غير العشوائية (غير الاحتمالية)، تسمى العينات في النوع الأول بالعينات العشوائية أو الاحتمالية، بينما يسمى النوع الثاني بالعينات غير العشوائية. وينقسم كل نوع بدوره إلى أنواع متعددة، يختلف تصنيفها من مرجع لآخر:

1.3.المعاينة العشوائية (الاحتمالية):

في هذا النوع من المعاينة يكون لكل مفردة فرصة أو احتمال معلوم للظهور في العينة وكلمة "عشوائية" هنا لا تعني أنها عينة سحبت بطريقة اعتباطية بل تعني إتاحة فرصة الاختيار لجميع الوحدات أو عناصر الظاهرة المدروسة وتتطلب المعاينة العشوائية أيضا توفر إطار للمعاينة، وعلى العكس من المعاينة غير الاحتمالية فإنها تسمح بتقييم مدى دقة النتائج، حيث أنها لا تسمح فقط بتقدير معالم المجتمع وإنما بقياس الخطأ المحتمل في النتائج أيضا والذي ينتج عادة عن الدراسة الجزئية كبديل لأسلوب الحصر الشامل.[2] وتعتمد هذه المعاينة على نظرية الاحتمالات سواء في اختيار مفردات العينة أو في تعميم النتائج المحصل عليها من هذه العينات على المجتمعات التي أخذت منها أو في تحديد درجة الثقة بالنتائج وحساب الأخطاء وتكون المعاينة العشوائية على أنواع عدة أهمها:

- **المعاينة العشوائية البسيطة:**

[1] GRAIS Bernard: Méthodes statistiques : techniques statistiques 2, 3eme édition, édition, Dunod, Paris 1998, p. 221
[2] DODGE Yadolah . Premiers pas en statistique. Springer Verlag, France, 2003, P.217.

يلجأ إليها الباحث في حالة ما إذا كان مجتمع الدراسة ليس كبيرا ويحمل قدرا من التجانس بين وحداته حيث توفر فُرصًا متكافئة لكل عناصر المجتمع للدخول في العينة ولكن المفردات التي تدخل في العينة تكون عن طريق الصدفة البحتة، ولكي يتحقق ذلك فإن الأمر يتطلب تحديد عناصر المجتمع تحديدا كاملا، حيث يكون هذا التحديد على شكل قائمة أو خريطة تضم كل عناصره وهذه القائمة تسمى الإطار ولا يجوز الاختيار العشوائي إلا من المفردات التي يضمها الإطار.

لتوضيح أسلوب العمل وفق هذا النوع نفترض أنه لدينا مجتمع محدود ومتجانس بحجم N عنصر ويراد اختيار عينة عشوائية بسيطة بحجم n عنصر، فإن احتمال ظهور أي مفردة ضمن مجتمع الدراسة يساوي $\frac{1}{N}$ ويكون السحب بطريقتين هما:[1]

– **السحب بالإرجاع:** وتسمى في هذه الحالة بالمعاينة العشوائية البسيطة مع الإعادة ESAR، حيث يمكن للعنصر الواحد أن يظهر في العينة أكثر من مرة، وبذلك نحصل على عينة مستقلة.

– **السحب بدون إرجاع:** تسمى في هذه الحالة بالمعاينة العشوائية البسيطة بدون إعادة ESSR، إذ لا يمكن للعنصر الواحد أن يظهر في العينة أكثر من مرة ونحصل بذلك على عينة غير مستقلة.

ملاحظة:

المعاينة العشوائية البسيطة عن طريق السحب مع الإرجاع نادرة الاستعمال في الواقع العملي، لأنه لا معنى للحصول على الوحدة نفسها مرتين في العينة، كما أن السحب دون إرجاع خاصة مع عدم مراعاة ترتيب الوحدات يعطي تقديرات أكثر دقة، بالإضافة إلى أن التباين المرتبط بالعينة غير المستقلة يكون دائما أقل من المرتبط بالعينة المستقلة.

وفيما يلي الخطوات المتبعة في سحب عينة عشوائية بسيطة:

- إعداد قوائم تتضمن جميع عناصر المجتمع (الإطار)؛
- ترقيم جميع وحدات المجتمع بأرقام متسلسلة؛
- تحديد حجم العينة المطلوب سحبها؛
- اختيار وحدات العينة وذلك باستعمال إحدى الطرق الثلاثة التالية:
  - طريقة القرعة؛
  - طريقة جداول الأرقام العشوائية؛
  - طريقة توليد الأرقام العشوائية بالحاسب الآلي.

[1] معتوق امحمد، الإحصاء الرياضي والنماذج الإحصائية –سلسلة دروس مع تمارين مختارة، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2015، ص 92.

يعاب على العينة العشوائية البسيطة أنها تنطوي على إجراءات طويلة ومملة، خصوصا إذا كانت العينة كبيرة، لأن الاختيار العشوائي يحتاج إلى وقت وجهد كبيرين ولتسهيل هذه العملية يمكن استخدام أسلوب المعاينة المنتظمة والذي يعتبر واسع الانتشار وكثير الاستعمال في التطبيقات العملية.

- **المعاينة العشوائية المنتظمة:**[1]

تشير تسمية هذا النوع من العينات إلى أن تشكيلها يتبع أسلوبا منتظما لاختيار وحداتها فهي ليست عشوائية بشكل كلي لأن فيها نوع من الانتظام، راجع إلى تركيب وحدات العينة في إطار تصنيف أو نظام معين ولهذا سميت بالمنتظمة أو النظامية. تمتاز هذه الطريقة بتوفير كثير من الوقت والجهد وتعتبر أكثر كفاءة من المعاينة العشوائية البسيطة، خاصة إذا كان حجم المجتمع كبيرا .يتم اختيار العينة المنتظمة من مجتمع متجانس، وتمتاز بأنها تعتمد على العشوائية في تحديد العنصر الأول من العينة الذي يعتمد عليه تحديد باقي عناصر العينة، حيث تنتشر لتشمل المجتمع ككل فهي بذلك تكون ممثلة له .يتم اختيار وحدات العينة من الإطار بطريقة منتظمة مرتبة وفقا لمتتالية حسابية أساسها r والذي يسمى أيضا مدى المعاينة، وذلك وفقا للخطوات التالية:

- ترقيم جميع وحدات المجتمع من 1 إلىN ؛
- تحديد حجم العينة المطلوبة وليكنn ؛
- حساب مدى العينة والذي يمثل مسافة الاختيار بين عنصرين متتاليين ويحسب وفقا للقاعدة التالية:

$$\boldsymbol{r=\frac{N}{n}}$$

- تقسيم المجتمع الى عدد من الفئات المتساوية الطول في كل منها r عنصر
- اختيار العنصر الأول للعينة بسحب عنصر عشوائيا من المجموعة الأولى وليكن **b** أي أن b يكون محصورا بين 1 وr، وبذلك فإن العنصر الأول للعينة المنتظمة هو العنصر الذي يحمل الرقم b؛
- يتم الحصول على باقي عناصر العينة المنتظمة بمراعاة أن تحمل هذه العناصر أرقاما تشكل فيما بينها حدود متتالية حسابية حدها الأول b، أساسها r وعدد حدودها n، وهذه الأرقام هي:

$$\{(\boldsymbol{b}), (\boldsymbol{b}+\boldsymbol{r}), (\boldsymbol{b}+\boldsymbol{2r}), (\ \boldsymbol{b}+\boldsymbol{3r}), \dots\ (\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1})\boldsymbol{r})\}$$

وعلى هذا الأساس نجد في النهاية أن جميع المجموعات تساهم بمفردة واحدة في تكوين حجم العينة n.

---

[1] أنظر كل من: بتصرف

- محمد الفاتح محمود بشير المغربي، مبادئ الإحصاء للاقتصاد والعلوم الإدارية، الأكاديمية الحديثة للكتاب الجامعي، مصر، 2022، ص 25.
- فايز جمعة صالح النجار وآخرون، أساليب البحث العلمي، منظور تطبيقي، دار الحامد، عمان، الأردن، ،2009، ص 95

ملاحظة:

من أهم عيوب هذه المعاينة المنتظمة أنه إذا كان مجتمع الدراسة يعكس اتجاهات دورية للظاهرة موضوع البحث وكان مدى المعاينة k مساويا لطول الدورة أو إحدى مضاعفاتها، فإن هذه المعاينة تكون غير ممثلة للمجتمع المدروس وبالتالي تعطي تقديرات متحيزة

مثال:

إذا أردنا تشكيل عينة منتظمة حجمها 500 عنصر من مجتمع حجمه 500000 عنصر فكيف يتم ذلك؟

الحل:

لتشكيل عينة منتظمة من 500 عنصر من مجتمع حجمه 500000 عنصر نتبع الخطوات التالية:

1.نحسب الأساس r حيث:

$$r = \frac{N}{n} = \frac{500000}{500} = 1000$$

2.نقسم المجتمع إلى مجموعات متساوية في كل منها 1000 عنصر ثم نرقم عناصر المجموعة الاولى من 1 إلى 1000 والمجموعة الثانية من 1001 إلى 2000 وهكذا حتى المجموعة الأخيرة من 499001 إلى 500000.

3. نختار عنصر b بطريقة عشوائية من المجموعة الأولى ولنفرض أنه يحمل الرقم 611

4. بناء على العنصر b يتحدد باقي عناصر العينة تلقائيا، حيث تمثل أرقام هذه العناصر حدود متتالية حسابية حدها الأول b وأساسها r وذلك كما يلي:

العنصر الثاني يحمل الرقم $b + r$ أي:

$$b + r = 611 + 1000 = 1611$$

العنصر الثالث يحمل الرقم $b + 2r$ أي:

$$b + 2r = 611 + 2 \times 1000 = 2611$$

العنصر الرابع يحمل الرقم $b + 3r$ أي:

$$b + 3r = 611 + 3 \times 1000 = 3611$$

وهكذا حتى آخر عنصر والذي يحمل الرقم $b + (n-1)r$ **أي**:

$$b + (500 - 1)r = 611 + 499 \times 1000 = 499611$$

وبذلك فإن عناصر هذه العينة المنتظمة هي العناصر التي تحمل الأرقام التالية:

$$\{611; 1611; 2611; 3611; \dots ; 499611\}$$

- **المعاينة العشوائية الطبقية:**[1]

في كثير من الأحيان يكون المجتمع الإحصائي غير متجانس من حيث الخصائص ذات الصلة بموضوع البحث كالتباين الحاصل في دخول الأفراد والمستوى الثقافي وغير ذلك، مما يؤثر على تمثيل العينة للمجتمع وبالتالي على دقة النتائج وفي هذه الحالة يكون استخدام أسلوب المعاينة الطبقية هو المناسب والتي تعد من أفضل أنواع المعاينة الاحتمالية وأكثرها دقة في تمثيل مجتمع الدراسة في هذه الحالة لأنه يهدف إلى تصميم عينة ممثلة لكافة الطبقات التي يتكون منها المجتمع المدروس، مما يؤدي إلى تقليل أخطاء المعاينة دون زيادة حجم العينة.

وتقوم المعاينة العشوائية الطبقية على تقسيم المجتمع إلى طبقات حسب خصائص معينة لها علاقة بموضوع البحث، ليتم الحصول على طبقات متجانسة وغير متقاطعة مع بعضها البعض ويشترط هنا أن يكون عدد الطبقات صغير لتفادي الحسابات الطويلة من جهة والتوصل إلى درجة دقة معقولة من جهة أخرى، ومن ثم اختيار عينة عشوائية بسيطة من كل طبقة لتشكل في مجموعها حجم العينة المطلوبة، وهذا بمراعاة أن تكون نسبة تواجد كل طبقة في العينة بنفس نسبة وجودها في المجتمع. يمكن تلخيص هذه الخطوات بما يلي:

- تقسيم المجتمع الاحصائي غير المتجانس N إلى طبقات متجانسة: $N_1, N_2, N_3 \dots\dots\dots N_k$ بحيث لا يحدث تداخل بين وحداتها أي لا تتكرر الوحدة ذاتها في أكثر من طبقة واحدة بشرط أن يكون $N_1, N_2, N_3 \dots\dots\dots N_k = N$
- نسحب عينة عشوائية بسيطة من كل طبقة بحيث يتناسب عدد مفردات كل عينة مع حجم كل طبقة لتكون في مجموعها حجم العينة n المطلوب، ويمكن الحصول على حجم هذه العينات وفقا للصيغة الآتية:

$$\boldsymbol{n_i = N_i \times \frac{n}{N}}$$

حيث أن:

$\boldsymbol{n_i}$: حجم العينة رقم (i)؛

$\boldsymbol{N_i}$: حجم الطبقة رقم (i)؛

N : حجم المجتمع الإحصائي؛

n: حجم العينة المطلوب، إذ أن: $\boldsymbol{n = \sum_i^k n_i}$

[1] أنظر كل من:

- حسن ياسين طعمة وايمان حسين حنوش، مرجع سبق ذكره، ص.185-186.
- جمال رشيد الكحلوت. مبادئ نظرية العينات. مكتبة الفريد الالكترونية، 2003، ص.3-4.

ملاحظة:

قد تكون الطبقات المكونة معبرا عنها بالنسب المئوية لكل منها، في هذه الحالة يتم حساب عدد مفردات كل طبقة بالاعتماد على تلك النسب.

مثال:

عين عدد المؤسسات التي يجب سحبها من كل طبقة إذا أردنا سحب عينة عشوائية طبقية حجمها $n = 30$ من مجتمع يتكون من 100 مؤسسة تتوزع إلى ثلاث طبقات كما هو موضح في الجدول الموالي:

الطبقة	مؤسسات صغرى	مؤسسات متوسطة	مؤسسات كبرى	المجموع
عدد عناصر كل طبقة	50	20	30	100

الحل:

لدينا:

$$n_i = N_i \times \frac{n}{N}$$

- عدد المؤسسات الواجب سحبها من الطبقة الأولى هو:

$$n_1 = 30 \times \frac{50}{100} = 15$$

- عدد المؤسسات الواجب سحبها من الطبقة الأولى هو:

$$n_1 = 30 \times \frac{20}{100} = 6$$

- عدد المؤسسات الواجب سحبها من الطبقة الأولى هو:

$$n_1 = 30 \times \frac{30}{100} = 9$$

أي أن تشكيل عينة طبقية حجمها 30 مؤسسة من هذا المجتمع يتطلب سحب 15 مؤسسة صغرى و 6 مؤسسات متوسطة و 9 مؤسسات كبرى

- **المعاينة العشوائية العنقودية:**[1]

تستخدم المعاينة العنقودية في حالة المجتمعات الكبيرة أو في حالة كون مفردات المجتمع متباعدة جغرافيا، ويعتمد هذا النوع من العينات على تجزئة مجتمع الدراسة إلى مجموعات (عناقيد) وذلك وفقا لخاصية معينة كما هو الحال في العينة الطبقية ونختار من هذه المجموعات عينة عشوائية بسيطة ثم نأخذ جميع الأفراد في المجموعات المختارة فتسمى عينة عشوائية عنقودية من مرحلة واحدة، أما إذا اخترنا عينة عشوائية بسيطة من

[1] محمد عبد الفتاح الصيرفي ، الدليل التطبيقي للباحثين، دار وائل، عمان، الأردن، 2002، ص 201.

الأفراد من كل مجموعة مختارة فتسمى عينة عشوائية عنقودية ذات مرحلتين، ويمكن أن تكون العينة العنقودية مكونة من عدة مراحل وتسمى في هذه الحالة عينة عنقودية متعددة المراحل

توجد عدة عوامل يجب مراعاتها عند استخدام العينة العنقودية من بينها ما يلي:

- يجب أن تكون العناقيد معرفة بدقة وكل مفردة من مجتمع الدراسة يجب أن تنتمي لمجموعة أو عنقود واحد فقط؛
- يجب أن يكون عدد المفردات في العنقود معروفا؛
- يجب اختيار العناقيد عشوائيا لتقليل خطأ العينة؛
- يجب مراعاة التوازن في حجم العناقيد لتقليل خطأ العينة .العيب الوحيد لهذا النوع أن درجة دقة النتائج عادة ما تكون منخفضة.

2.3.المعاينة غير العشوائية (غير الاحتمالية):

وهي المعاينة التي لا تخضع في طريقة اختيار مفردات العينة فيها إلى مبدأ تكافؤ الفرص أي لا تكفل لجميع مفردات المجتمع احتمال ثابت ومحدد للاختيار، وإنما يحكمها التدخل الشخصي للباحث في عملية اختيار المفردات وذلك لاعتبارات تتعلق عادة بطبيعة المشكلة المدروسة، مثل استخدام المعاينة غير العشوائية في الاختبارات القبلية من أجل إجراء التعديلات اللازمة في الأسئلة قبل بدء المعاينة الرئيسية، لكن النتائج المتحصل عليها من تطبيق هذا النوع من المعاينة تقريبية وأقل دقة مقارنة بتلك التي يحصل عليها من المعاينة العشوائية ومن أهم أنواعها:

- **المعاينة العمدية أو المقصودة:**

يلجأ إليها الباحث إذا كان المجتمع كبيرا جدا وكانت امكانياته لا تسمح له إلا بدراسة عينة حجمها صغير جدا، في هذه الحالة يتعمد الباحث اختيار مفردات معينة يرى بخبرته السابقة أن هذه العينة يمكن أن تعطي تمثيلا مقبولا لمجتمع الدراسة. وهذه الطريقة غير عملية وغالبا يتم اللجوء إليها في حالة البحوث التمهيدية.

- **المعاينة الحصصية:**

وهي أكثر أنواع المعاينة غير الاحتمالية استخداما، تقوم على اختيار عدة خصائص للمجتمع ترتبط بموضوع البحث تسمى متغيرات المراقبة كالسن، المهنة، الحالة الاجتماعية وغيرها. تستخدم كثيرا في عمليات استطلاع الرأي العام في حالة المجتمعات الاحصائية غير المتجانسة والحالات التي يتعذر فيها توفير إطار المعاينة وكذا الدراسات التي تتطلب السرية. سميت بالحصصية لأن مجتمع البحث يقسم إلى فئات طبقا لصفاتها

الرئيسة، وتمثل كل فئة بنسبة وجودها في المجتمع، ويتجلى الفرق بين هذا النوع من المعاينة والمعاينة العشوائية الطبقية في كون أن اختيار مفردات العينة الطبقية يتم بشكل عشوائي بالإضافة إلى عدم محدودية مفردات المجتمع الأصلي في حالة المعاينة الحصصية

4. تحديد حجم العينة:[1]

قبل الشروع في عملية اختيار العينة، يحتاج الباحث إلى تحديد حجم العينة المناسب حتى تزوده بالبيانات والمعلومات التي يعتمد عليها في تعميم النتائج على المجتمع كله، هناك اتجاهان لتحديد حجم العينة وهما:

- **الاتجاه الأول:**

حسب هذا الاتجاه يمكن للباحث الاعتماد على خبرته السابقة عند تحديد حجم العينة المطلوب أو قد يسترشد الباحث برأي وخبرة الآخرين، هذا الأسلوب في اختيار العينة يفيد الباحثين الذين لا يميلون إلى استخدام الأسلوب الرياضي في اختيار العينة، ففي الدراسات المسحية يكون من المناسب اختيار 20% من أفراد المجتمع الكلي إذا كان عدد أفراد هذا المجتمع معتدلا (ما بين 500 إلى 1000) وتقل هذه النسبة كلما كبر حجم المجتمع الأصلي لتصل إلى حوالي 5%.وفي الدراسات التجريبية ذات المعالجة الواحدة (متغير مستقل واحد) ويكون حجم العينة الواحدة مناسبا إذا زاد عدد أفرادها عن 30 فردا (لكل مستوى من مستويات هذه المعالجة) أما في الدراسات التجريبية ذات المعالجتين أو أكثر، فأن من المستحسن أن لا يقل عدد أفراد الخلية الواحدة في التصميم الإحصائي عن خمسة أفراد .

- **الاتجاه الثاني**

هذا الاتجاه يأخذ بعين الاعتبار بعض القواعد الاحتمالية لتحديد حجم العينة، كاحتمال الوقوع في الخطأ من النوع الأول واحتمال حدوث الخطأ من النوع الثاني، بالإضافة إلى بعض الأمور الأخرى المرتبطة بالتكلفة وبعض المقاييس الإحصائية.

ومن أهم المبادئ التي يجب مراعاتها عند تحديد حجم العينة ما يلي:

- تحديد الهدف من اختيار العينة وبناء على هذا الهدف تعطى حدود الخطأ المسموح به، ونوع القرار المتوقع اتخاذه بناء على البيانات التي ستوفرها العينة؛
- إعطاء علاقة تربط بين حجم العينة المطلوب ومدى الدقة المطلوبة من العينة (حدود الخطأ المسموح به)

---

[1] سعيد التل وآخرون، مناهج البحث العلمي، تصميم البحث والتحليل الإحصائي، دار المسيرة، عمان، الأردن، 2007، ص ص 105- 106 بتصرف

- في بعض الحالات، مثل العينة الطبقية، تحتاج إلى تقدير حجم العينة في كل طبقة، وبالتالي يكون حجم العينة الكلي هو مجموع الأحجام الجزئية.
- يجب ربط حجم العينة مع التكلفة المتاحة للدراسة والزمن، وما شابه ذلك من عوامل قد تؤثر في حجم المجتمع.
- معرفة حجم المجتمع الأصلي مسبقا، وان لم يكن هذا الحجم معروفا، فيمكن تقديره بإجراءات إحصائية معينة.

ملاحظة:

يعد التباين بين أفراد المجتمع العامل الحاسم في تحديد حجم العينة، فكلما كبر التباين بين مفردات المجتمع كلما استوجب ذلك أن يكون حجم العينة كبيرا بغض النظر عن حجم ذلك المجتمع، إذ كلما زاد حجم العينة قل الخطأ المعياري للمعاينة وكلما نقص حجمها زاد الخطأ المعياري للمعاينة، أما في المجتمع المتجانس الصفات والخصائص تكفي عينة صغيرة لدراسته.

5. مصادر الأخطاء في العينات:

النتائج التي نحصل عليها من العينات لا تكون مطابقة تماما للنتائج في حالة المسح الشامل لأن استخدام أسلوب المعاينة كأسلوب لجمع البيانات قد يوقع الباحث في العديد من الأخطاء تُدرج تحت مُسمى أخطاء المعاينة الكلية، والتي يمكن تقسيمها إلى أخطاء المعاينة العشوائية وأخطاء التحيز حيث:

- **أخطاء المعاينة العشوائية:**

وهي الأخطاء التي تنتج عن الاختلاف أو التشتت بين قيم الوحدات التي تتكون منها العينة، بالإضافة إلى تلك الوحدات التي لم تشأ الصدفة أن ندخلها في العينة حيث يسمى هذا الخطأ بخطأ المعاينة العشوائي. ويعتمد الحجم المتوسط لأخطاء المعاينة العشوائية على كل من: حجم العينة، مدى تشتت مفرداتها وطريقة اختيار الوحدات.

- **أخطاء التحيز:**

السبب في هذا الخطأ هو زيادة أو نقص البيانات وقد يحدث هذا الخطأ أيضا في المسح الشامل، ولخطأ التحيز أنواع هي[1]:

---

[1] أنظر كل من:

- جميل أحمد، مرجع سبق ذكره، ص.200-202. متفرقة.
- مركز الاحصاء أبو ظبي. دليل المعاينة الإحصائية: أدلة المنهجية والجودة، دليل رقم (1)، ص.6. متوفر على الموقع: www.scad.ae .

- خطأ التحيز في الاختيار والذي ينتج عن الاختيار غير العشوائي لوحدات العينة، اعتماد بعض طرق الاختيار على خاصية معينة كالاعتماد على دليل الهاتف، التحيز المقصود أو غير المقصود في اختيار بعض وحدات العينة كاستبدال وحدة بوحدة أخرى غير مدرجة ضمن الإطار، عدم التمكن من استكمال وصول جميع الاستمارات؛
- خطأ التحيز في التقدير وهو انحراف متوسط جميع التقديرات الممكنة لمعلمة المجتمع عن قيمتها الحقيقية والذي ينتج عموما من عدم استخدام طرق التقدير أو التحليل المناسبة. ومن الصعب اكتشاف هذا الخطأ والتخلص منه إلا بإجراء تعديلات جذرية على تصميم الدراسة أو طريقة جمع البيانات أو تعديل النتائج.
- خطأ التحيز الناتج عن التعريف الخاطئ لوحدة المعاينة.
- أخطاء أخرى شائعة في العينات: ومنها أخطاء عدم الاستجابة الناتجة عن عدم تحديد الإطار، أخطاء التبويب ومعالجة البيانات، أخطاء الطباعة وأخطاء تفسير النتائج.

III. توزيع المعاينة:

غالبا ما تكون معالم المجتمع مجهولة حيث يتم تقديرها من بيانات العينة، وبما أنه يمكن سحب أكثر من عينة من نفس المجتمع فإن قيمة المقدر المحسوبة من بيانات العينة تكون عبارة عن متغير، ومادام السحب يتم عشوائيا فإن هذا المقدر هو متغير عشوائي أيضا والذي يمكن أن يكون له توزيع احتمالي يسمى توزيع المعاينة. وهو التوزيع الاحتمالي لأي مقدر نحسب قيمته من كل العينات العشوائية ذات الحجم المتساوي والممكن سحبها من هذا المجتمع، وتوزيع المعاينة يوضح لنا نمط تغير الإحصائية وبالتالي نتمكن من إجراء استدلال إحصائي حول قيم المعالم المناظرة لها في المجتمع، لكن قبل دراسة توزيع المعاينة لمختلف الاحصائيات سنتطرق لبعض التوزيعات الاحتمالية المتصلة والأكثر استخداما في توزيع المعاينة وهي:

1. بعض التوزيعات الاحتمالية المتصلة المستخدمة في توزيع المعاينة:

فيما يلي بعض التوزيعات الاحتمالية المتصلة الأكثر استخداما في الإحصاء الاستدلالي وهي:

1.1 التوزيع الطبيعي:

يعرف أيضا بتوزيع غوص ويعتبر هذا التوزيع أكثر التوزيعات الاحتمالية أهمية واستخداما كما أن الكثير من التوزيعات تشتق منه أو تؤول إليه وترجع أهمية التوزيع الطبيعي إلى أربع اعتبارات مهمة هي:[1]

- ✓ معظم الظواهر الطبيعية تتبع في توزيعها التوزيع الطبيعي أو تكون قريبة جدا منه؛

[1] علي السيد عبده الديب، محمد عبد المنعم جودة حزين، الإحصاء في مجال الأعمال، مصر، 2018- 2019، ص 133- 134. بتصرف

✓ توزيعات المعاينة لمتوسطات العينات تكون مقاربة للتوزيع الطبيعي ويزداد هذا التقارب كلما زاد حجم العينة؛

✓ إمكانية تحويل توزيعات كثيرة إلى التوزيع الطبيعي؛

✓ معظم الاختبارات المستخدمة في الاستنتاج الاحصائي مبنية على كون المتغير يتوزع توزيعا طبيعيا.

حيث يكون المتغير العشوائي المتصل x خاضعا للتوزيع الطبيعي إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية معرفة كما يلي:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\partial\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\partial}\right)^2}}$$

$\boldsymbol{\sigma}$: الانحراف المعياري للتوزيع ؛

$\boldsymbol{\mu}$: متوسط التوزيع ؛

$$\begin{cases} -\infty < \boldsymbol{x} < +\infty \\ -\infty < \boldsymbol{\mu} < +\infty \\ \boldsymbol{\sigma > 0} \end{cases}$$

يستخدم التوزيع الطبيعي كثيرا في مجال العينات ويتصف بالخصائص التالية:

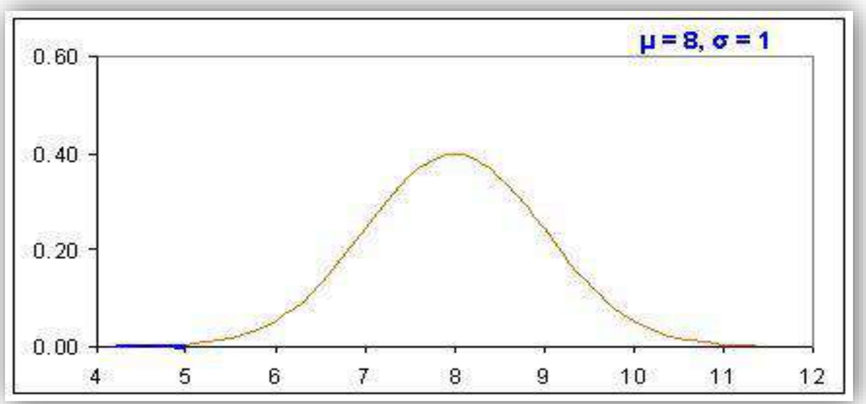
✓ يعتمد التوزيع الطبيعي على معلمتين هما متوسط المجتمع μ وتباين المجتمع σ^2 ونكتب باختصار :

$$\boldsymbol{x \rightarrow N(\mu; \sigma^2)}$$

✓ المتغير العشوائي المتصل x يأخذ قيما من $-\infty$ إلى $+\infty$

✓ شكل منحنى التوزيع الطبيعي يشبه الجرس حيث قمة المنحنى تكون عند متوسط المجتمع μ والمنحنى متماثل حول μ كما يوضحه الشكل الموالي.

شكل رقم (1): منحى التوزيع الطبيعي



المصدر: من إعداد الباحثة

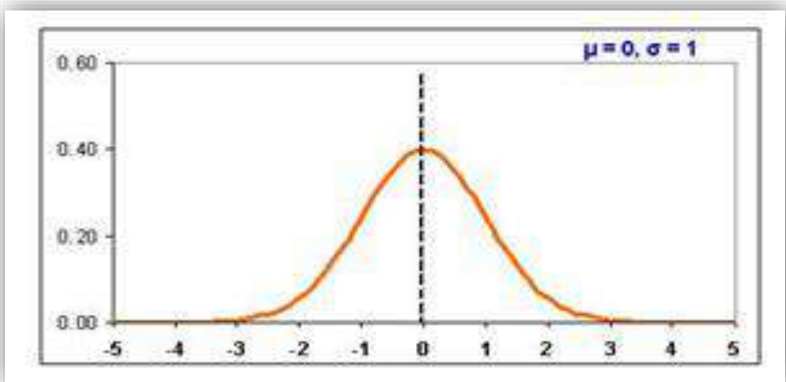
- **ملاحظة:**

هناك حالة خاصة بالنسبة للقانون الطبيعي العام وهو التوزيع الطبيعي المعياري حيث نقول أن المتغير العشوائي Z يخضع للتوزيع الطبيعي المعياري إذا كان Z يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي الصفر $(\mu = 0)$ وبتباين يساوي الواحد $(\sigma^2 = 1)$ و $-\infty < Z < +\infty$

وفي هذه الحالة نكتب:

$$Z \to N(0; 1)$$

شكل رقم(2): منحنى التوزيع الطبيعي المعياري



المصدر: من إعداد الباحثة

- **كيفية حساب الاحتمالات:**

إذا كان$x \to N(\mu; \sigma^2)$ فإنه لإيجاد احتمالات المتغير العشوائي الطبيعي يجب استخدام التوزيع الطبيعي المعياري حيث يتم الانتقال من التوزيع الطبيعي$N(\mu; \sigma^2)$ إلى التوزيع الطبيعي المعياري $N(0; 1)$ وفقا العلاقة التالية:

$$\boldsymbol{Z = \frac{x - \mu}{\sigma}}$$

علما أن Z يتبع التوزيع الطبيعي المعياري.

هناك جدول خاص يسمى جدول التوزيع الطبيعي المعياري يستخدم لإيجاد احتمالات المتغير العشوائي الطبيعي المعياري من النوع $p(z \leq a)$ مع مراعاة أن جدول التوزيع الطبيعي المعياري مصمم من أجل القيم الموجبة فقط لـ z ومنه وحسب خاصية التناظر بالنسبة للصفر فإن:

$$\boldsymbol{F(-z) = 1 - F(z)}$$

- **تحويل التوزيع الطبيعي إلى توزيع طبيعي معياري وايجاد الاحتمالات:**

لإيجاد احتمالات المتغير العشوائي الطبيعي$\boldsymbol{x \to N(\mu;\sigma^2)}$ فإننا نحوله أولا إلى متغير عشوائي طبيعي معياري $Z = N(0;1)$ ومن ثم نستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري لإيجاد الاحتمالات من النوع:

$p(z < z_1) = \boldsymbol{Q(z_1)}$ أو $\boldsymbol{F(z_1)}$

وذلك باستخدام العلاقة التالية:

$$\boldsymbol{x = N(\mu;\sigma^2) \Leftrightarrow Z = \frac{x-\mu}{\sigma} \to N(0;1)}$$

وبالتالي فإن احتمالات المتغير الطبيعي x تحسب كما يلي:

$$1/p(X < x) = p(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{x-\mu}{\sigma})$$
$$= p\left(Z < \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = F\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$
$$2/p(X > x) = 1 - p(X < x)$$
$$= 1 - p\left(Z < \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = 1 - F\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$
$$3/p(x_1 < X < x_2) = p(\frac{x_1-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{x_2-\mu}{\sigma})$$
$$= p(\frac{x_1-\mu}{\sigma} < Z < \frac{x_2-\mu}{\sigma})$$
$$= F\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - F(\frac{x_1-\mu}{\sigma})$$

مثال:

تقطع ماكنة نجارة الألمنيوم أخشابا من الألمنيوم الصناعي بقياسات تتبع التوزيع الطبيعي بمعدل سمك $\mu = 30mm$ وتباين قيمته $\partial^2 = 16$ أخذت عشوائيا لوحة من بين اللوحات المقطوعة للإختبار.

المطلوب:

1-كتابة التوزيع النظري لهذا المتغير(السمك)؛

2-حساب احتمال أن يكون سمكها أكبر من 30 ثم أقل من 40 ملم؟

3-حساب احتمال أن يقع سمكها بين القيمتين 20 و40 ملم؟

الحل:

1-كتابة التوزيع النظري:

$$f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-30)^2}{32}}$$

أو:

$$x \rightarrow N(30;16)$$

2-حساب الاحتمالات:

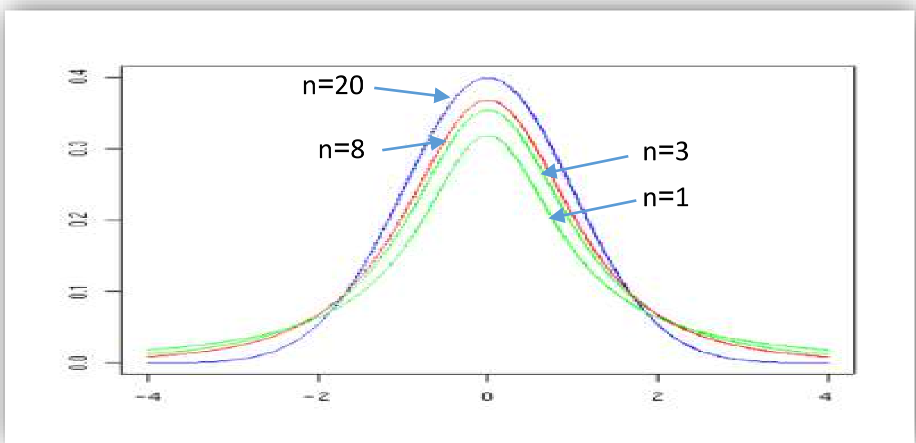
$$* \, p(X < 40) = p(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{40-30}{4})$$
$$= p(Z < 2.5) = F(2,5) = 0,9938$$
$$* \, p(X > 30) = 1 - p(X < 30)$$
$$= 1 - p\left(Z < \frac{30-30}{4}\right) = 1 - p(Z < 0)$$
$$= 1 - F(0) = 1 - 0,5 = 0,5$$
$$* \, p(20 < X < 40) = p(\frac{20-30}{4} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{40-30}{4})$$
$$= p(-2,5 < Z < 2,5)$$
$$= F(2,5) - F(-2,5) = F(2,5) - (1 - F(2,5))$$
$$= 2F(2,5) - 1 = 2(0,9938) - 1$$
$$= 0,9876$$

2.1 توزيع ستيودنت:

هو أحد التوزيعات الاحتمالية المتصلة، يشبه كثيرا التوزيع الطبيعي تكمن تطبيقاته في نظرية العينات واختبار الفرضيات كبديل للتوزيع الطبيعي، عندما يكون حجم العينة صغيرا، و هو توزيع اكثر تفرطح مقارنة بالتوزيع الطبيعي ويقترب منه كلما ارتفعت درجة الحرية n[1]، هو توزيع متناظر حول الصفر وهو يشبه إلى حد كبير التوزيع الطبيعي المعياري، إلا أنه أكثر تشتتا منه حيث يقترب شيئا فشيئا من التوزيع الطبيعي، كلما زادت قيمة n. وعموما يعتبر الاحصائيون، أن المنحنيات تتطابق تقريبا عند ($n \geq 30$)، والشكل الموالي يوضح أشكال منحنى توزيع ستيودنت عند درجات حرية مختلفة:

شكل رقم (3): أشكال منحنى توزيع ستيودنت

[1] تعرف درجات الحرية بأنها عدد المشاهدات المستقلة في العينة والتي تساوي حجم العينة مطروحاً منه عدد القيود أو معالم المجتمع التي يتم تقديرها من بيانات العينة.



المصدر: من إعداد الباحثة

- **قراءة واستعمال جدول ستيودنت:**

أعد جدول توزيع ستيودنت خصيصا من أجل قراءة قيم معينة في مجال تعريفه وذلك بدلالة كل من:

✓ درجة الحرية *n* ؛

✓ احتمال معلوم *p* حيث: *p(x≤ xi)*.

تسمى هذه القيم بالقيم الجدولية $t_{p;n}$.

أي أن الجدول الخاص بتوزيع ستيودنت يعطي قيم ترتبط بدرجة الحرية *n* وبالمساحة على يسار $t_{p;n}$ تحت المنحنى.

أمثلة:

$$t_{0,6;10} = 0,26 \ \Rightarrow p(T_{10} \leq 0,26) = 0,6$$
$$t_{0,55;20} = 0,127 \Rightarrow p(T_{20} \leq 0,127) = 0,55$$
$$t_{0,95;12} = 1,78 \Rightarrow p(T_{12} \leq 1,78) = 0,95$$

مثال:

أحسب الاحتمالات التالية:

$$P(X < 0.542) = 0.7$$
$$P(X > 0.879) = 1 - 0.8 = 0.2$$

- **ملاحظات:**

✓ يحتوي جدول توزيع ستيودنت فقط على قيم $t_{p;n}$من أجل (*P>0,5*) لذلك فمن أجل بعض الاحتمالات الصغيرة التي لا توجد في الجدول (*P<0,5*) نستخدم خاصية التناظر التي تعطينا:

$$\boldsymbol{t_{1-p} = -t_p}$$

مثال:

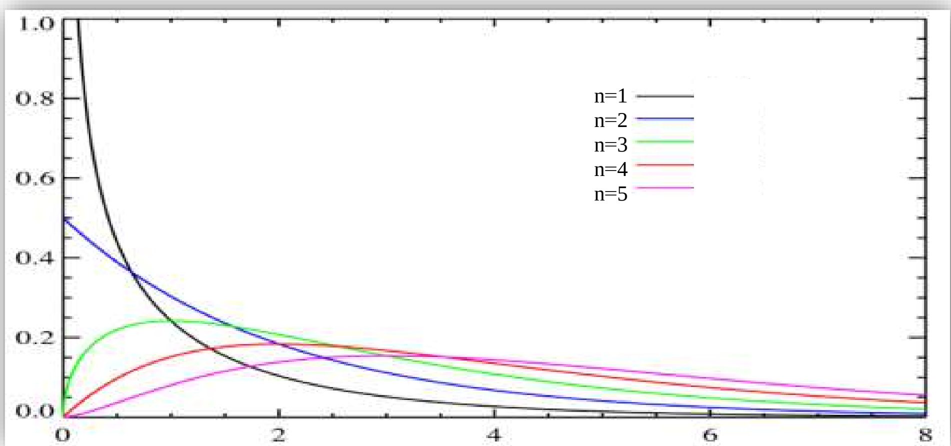
$$t_{0,25;20} = -t_{0,75;20} = -0,687$$

- ✓ بداية من $n\geq30$ يمكن الاعتماد على جدول التوزيع الطبيعي المعياري إذ أن هناك تطابق تام بين القيمتين.

3.1 توزيع كاي تربيع:

يعتبر توزيع كاي تربيع توزيعا مستمرا غير متناظر ملتوي نحو اليمين، يأخذ المنحنى التكراري لهذا التوزيع أشكالا مختلفة حسب قيمة درجة الحرية n وكلما زادت قيمة n قل الالتواء واقترب بذلك توزيع كاي تربيع من التوزيع الطبيعي مع العلم أن توزيع كاي تربيع هو توزيع موجب أي: $x\epsilon[0;+\infty[$ والشكل الموالي يوضح الأشكال التي يأخذها هذا التوزيع:

شكل رقم (4): أشكال منحنى توزيع كاي تربيع



المصدر: من إعداد الباحثة

- **قراءة واستعمال جدول كاي تربيع:**

إن جدول كاي تربيع قد أعد خصيصا من أجل تحديد قيم معينة لـ x في مجال تعريفه بدلالة معلومتين هما:

- ✓ درجة الحرية n؛
- ✓ احتمال معلوم p معبر عنه بـ $p(x \leq x_i)$

تسمى القيم الموجودة داخل الجدول بالقيم الجدولية ويرمز لها: $K^2_{p;n}$

مثال:

إذا كان x متغيرا عشوائيا يتبع توزيع كاي تربيع بدرجة حرية n تساوي 10.

- ✓ أوجد القيم الجدولية التي تحقق:

$$* \, p(x \le K^2_{p;n}) = 0{,}95$$
$$* \, p(x > K^2_{p,n}) = 0{,}05$$

✓ عند $n=9$ أحسب الاحتمالات التالية:

$$P(X < 21.666) \qquad P(X > 16.919)$$

الحل:

اعتمادا على جدول توزيع كاي مربع نجد:

$$p(x \le K^2_{p,n}) = 0{,}95 \to K^2_{0{,}95;10} = 18{,}307$$

وهذا يعني أن احتمال أن تقل قيمة المتغير العشوائي x عن القيمة 18,307 بـ 10 درجات حرية هو 0,95.

$$p(x > K^2_{p;n}) = 0{,}05 \Leftrightarrow 1 - p(x \le K^2_{p;n}) = 0{,}05$$

$$\Leftrightarrow p(x \le K^2_{p;n}) = 0{,}95$$

ومنه

$$K^2_{p;n} = K^2_{0{,}95;10} = 18{,}307$$

حساب الاحتمالات:

$$P(X < 21.666) = 0{,}99$$
$$P(X > 16.919) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$$

4.1 توزيع فيشر:

يعتبر توزيع فيشر توزيعا مستمرا موجبا غير متناظر ملتوي قليلا نحو اليمين، يتحدد شكله حسب قيم درجات الحرية n_1 و n_2 حيث كلما ازدادت هذه القيم كلما اقترب توزيع فيشر من التوزيع الطبيعي، ونظرا لأهمية توزيع فيشر في التحليل الاحصائي بين مجتمعين مختلفين تم جدولة قيم F في مجال تعريفه بدلالة ثلاثة معالم هي:

- ✓ درجة الحرية n_1؛
- ✓ درجة الحرية n_2 ؛
- ✓ احتمال معلوم p معبر عنه بـ $p(F \le F_{p;n_1;n_2})$.

تسمى القيم الموجودة داخل الجدول بالقيم الجدولية ونرمز لها بالرمز:

$$F_{p;n_1;n_2}$$

ملاحظة:

في الغالب تعطي الجداول الإحصائية قيم F عند:

$$\boldsymbol{p = 0,99} \text{ و } \boldsymbol{p = 0,95}$$

مثال:

باستعمال جدول توزيع فيشر أوجد القيم التالية:

$$F_{0,01;12;9};\ \ F_{0,05;2;15};\ \ F_{0,99;12;9};\ F_{0,95;2;15}$$

الحل:

$$* F_{0,95;2,15} = 3,68$$

أي:

$$p\left(F_{2;15} \le 3,36\right) = 0,95$$
$$* F_{0,99;12,9} = 5,11$$

أي:

$$p\left(F_{12;9} \le 5,11\right) = 0,99$$

ملاحظات:

1-من أجل الاحتمالات الصغيرة التي لا توجد في جدول توزيع فيشر فإنه ولإيجاد القيم الجدولية المقابلة لها نستعمل العلاقة التالية:

$$\boldsymbol{F_{p;n_1;n_2} = \frac{1}{F_{1-p;n_2;n_1}}}$$

2- من أجل $\mathbf{n_1=1}$ و $\mathbf{n_2=n}$ يقترب توزيع فيشر من توزيع ستيودنت وفق العلاقة التالية:

$$\boldsymbol{F_{p;1;n} = (t_{1-\left(\frac{1-p}{2}\right);n})^2}$$

3-كلما اقتربت $\mathbf{n_2}$ من ∞ مع ثبات $\mathbf{n_1}$ $\mathbf{(n_1=n)}$ يقترب توزيع فيشر من توزيع كاي تربيع وفق العلاقة التالية:

$$\boldsymbol{F_{p;n;\infty} = \frac{K^2_{p;n}}{n}}$$

أمثلة:

$$* F_{0,05;2;15} = \frac{1}{F_{0,95;15;2}} = \frac{1}{19,4} = 0,05$$
$$* F_{0,95;1;13} = t^2_{1-\left(\frac{1-0,95}{2}\right);13} = t^2_{0,975;13} = (2,16)^2$$
$$* F_{0,99;30;\infty} = \frac{K^2_{0,99;30}}{30} = \frac{50,9}{30} = 1,696 \approx 1,7$$

2. توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\bar{x}$:

إذا سحبنا من المجتمع الاحصائي جميع العينات العشوائية الممكنة ذات الحجم n ولكل عينة حسبنا قيمة الوسط الحسابي $\bar{x}$ فالتوزيع الاحتمالي للإحصائية $\bar{x}$ يسمى توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{x}$.

1.2 متوسط وتباين توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\bar{x}$:

يعتمد شكل ومعالم توزيع المعاينة على طبيعة المجتمع وحجمه (محدود أو غير محدود) وعلى طريقة سحب العينات (سحب بدون إرجاع أو سحب مع الإرجاع)، وتجدر الاشارة إلى أنه لتوزيع المعاينة للمتوسطات وسط يرمز له بـ $E(\bar{x})$ وتباين يرمز له بـ $\boldsymbol{v(\bar{x})}$ ، حيث:[1]

- **الوسط الحسابي لتوزيع المعاينة $\boldsymbol{E(\bar{x})}$:**

اذا كان μ يمثل متوسط مجتمع ما و $\bar{x}$ يمثل متوسط عينة مسحوبة من ذات المجتمع ، فإن القيمة المتوقعة لمتوسط العينة $E(\bar{x})$ وتسمى التوقع الرياضي لـ $\bar{x}$ تحسب بالعلاقة التالية:

$$E(\bar{x}) = E\left(\frac{\sum x_i}{n}\right) = E\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}\right)$$

$$E(\bar{x}) = \frac{E(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n)}{n}$$

$$E(\bar{x}) = \frac{E(x_1) + E(x_1) + E(x_1) + \cdots + E(x_1)}{n}$$

$$E(\bar{x}) = \frac{\mu + \mu + \mu + \cdots + \mu}{n}$$

$$\boldsymbol{E(\bar{x}) = \mu}$$

أي أن المتوسط الحسابي للمتوسطات الحسابية لكل العينات الممكن سحبها يساوي تماما المتوسط الحسابي للمجتمع.

- **تباين توزيع المعاينة للمتوسط $\boldsymbol{v(\bar{x})}$:**

اذا كان $v(x)$ يمثل تباين مجتمع ما و $\bar{x}$ يمثل متوسط عينة مسحوبة من ذات المجتمع، فإن تباين توزيع المعاينة للمتوسط $v(\bar{x})$ يحسب بالعلاقة التالية:

$$v(\bar{x}) = v\left(\frac{\sum x_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2}.n.v(x)$$

ونعلم أن:

$$v(x) = \sigma^2$$

$$V(\bar{x}) = \frac{1}{n^2}.n.\sigma^2$$

[1] جبار عبد مضحي، مقدمة في نظرية الاحتمالات، دار المسيرة للنشر والتوزيع، الطبعة الاولى، 2011 ص 277.

$$V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

أما إذا تمت عملية السحب بدون إرجاع من مجتمع محدود حجمه N فإن:

$$V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} \times \frac{N-n}{N-1}$$

حيث:

$\frac{N-n}{N-1}$: يسمى معامل الإرجاع أو معامل الشمولية أو معامل التصحيح ويظهر دوما في علاقة التباين لتوزيع المعاينة لأي إحصائية إذا تم السحب بدون إرجاع من مجتمع محدود، وعمليا يهمل هذا المعامل إذا كان حجم المجتمع كبير جدا أمام حجم العينة.

أغلب الإحصائيون يعتبرون حجم المجتمع كبير جدا أمام حجم العينة إذا كانت النسبة $\frac{n}{N}$ والتي تسمى كسر المعاينة أقل من 0,05 وهناك من يهمل هذا المعامل إذا كان $\frac{n}{N} \leq 0{,}1$

ملاحظة:

- إذا كان المجتمع غير محدود فإن المعاينة بدون إرجاع تصبح مثل المعاينة مع الإرجاع؛
- الوسط الحسابي لتوزيع المعاينة يساوي الوسط الحسابي للمجتمع$(E(\bar{x}) = \mu)$ بغض النظر عن حجم المجتمع وطريق السحب؛
- عمليا نسحب عينة واحدة من المجتمع.

2.2 طبيعة التوزيع الاحتمالي للمتوسط الحسابي للعينة $\bar{x}$:

يعتمد شكل ونوع التوزيع الاحتمالي لمجتمع المتوسطات الحسابية للعينات العشوائية على توزيع المجتمع الأصلي الذي اختيرت منه هذه العينات العشوائية، وسندرس طبيعة توزيع المعاينة للمتوسطات من خلال الحالات التالية:

بعد أن تعرفنا على القواعد المرتبطة بالتوزيع الطبيعي يمكننا توضيح طبيعة توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة حيث نميز حالتين هما:

- **أولا: توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\bar{x}$ عندما يكون حجم العينة كبير $n \geq 30$:**

إذا كان لدينا مجتمعا وسطه الحسابي μوتباينهσ^2 وسحبنا عينات عشوائية حجم كل منها n وكانت n كبيرة كفاية $(n \geq 30)$ فإن الوسط الحسابي لهذه العينات $\bar{x}$ يتبع تقريبا التوزيع بمتوسط $E(\bar{x})$ وتباين $V(\bar{x})$ وهو

ما تشير إليه نظرية النهاية المركزية.[1] أي أن $\overline{\boldsymbol{x}}$ يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره $E(\bar{x})$ وتباين قدره $V(\bar{x})$ أو $\boldsymbol{\sigma^2_{\bar{x}}}$ ونكتب:

$$\overline{\boldsymbol{x}} \rightarrow N(E(\bar{x}); V(\bar{x}))$$

وبذلك يكون:

$$\boldsymbol{Z} = \frac{\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{E}(\overline{\boldsymbol{x}})}{\sqrt{\boldsymbol{V}(\overline{\boldsymbol{x}})}} \rightarrow \boldsymbol{N}(\boldsymbol{0}; \boldsymbol{1})$$

حيث:

- إذا كان السحب مع الإرجاع أو السحب بدون إرجاع من مجتمع غير محدود فإن:

أ–إذا كان تباين المجتمع $\boldsymbol{\sigma^2}$ معلوم:

$$E(\bar{x}) = \mu$$
$$V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

ب–إذا كان تباين المجتمع σ^2 مجهول:

$$E(\bar{x}) = \mu$$
$$V(\bar{x}) = \frac{s^2}{n}$$

علما أن:

- تباين العينة $\boldsymbol{s^2}$ يحسب بالعلاقة التالية:

$$s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

- إذا كان السحب بدون إرجاع من مجتمع محدود و $\frac{n}{N} \leq 0{,}05$ فإن $V(\bar{x})$ لا يضرب في معامل الشمولية $\frac{N-n}{N-1}$
- إذا كان السحب بدون إرجاع من مجتمع محدود و $\frac{n}{N} > 0{,}05$ فإن $V(\bar{x})$ يضرب في معامل الشمولية $\frac{N-n}{N-1}$

مثال:

اشترى فلاح 125 صندوق نحل (تم اختيار الصناديق بشكل عشوائي) من احدى المستثمرات لتربية النحل علما أن وزن العسل الذي ينتجه الصندوق الواحد في هذه المستثمرة يتوزع توزيع طبيعي بمتوسط قدره 36 كلغ

[1] إعداد قسم الإحصاء جامعة الملك عبد العزيز، مبادئ الإحصاء للتخصصات النظرية: الإدارية والإنسانية، الطبعة العاشرة، خوارزم العلمية، السعودية، 2018، ص 239.

وانحراف معياري قدره 5 كلغ، ما احتمال ألا يتجاوز متوسط وزن العسل الذي ينتجه الصندوق الواحد في هذه العينة (الصناديق التي اشتراها الفلاح) 36 كلغ.

الحل:

1.تحديد القانون الاحتمالي لـ $\bar{x}$:

بما أن المجتمع يتوزع توزيع طبيعي فإن توزيع المعاينة لمتوسط العينة يتوزع أيضا توزيع طبيعي بمتوسط $E(\bar{x})$ وتباين قدره $V(\bar{x})$ أي:

$$\bar{x} \to N\big(E(\bar{x}); v(\bar{x})\big)$$

حيث:

$$E(\bar{x}) = \mu = 35$$
$$v(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{5^2}{125} = 0.2$$

2. حساب احتمال ألا يتجاوز متوسط وزن العسل الذي ينتجه الصندوق الواحد في هذه العينة 36 كلغ أي:

$$p(\bar{x} \leq 36) = ?$$

$$p(\bar{x} \leq 36) = p\left(\frac{\bar{x}-E(\bar{x})}{\sqrt{v(\bar{x})}} \leq \frac{36-35}{\sqrt{0.2}}\right) = p\left(Z \leq \frac{1}{0.45}\right) = p(Z \leq 2.22) = F(2.22)$$

وبالنظر إلى جدول التوزيع الطبيعي نجد أن:

$$F(2.22) = 0.9866$$

ومنه:

$$p(\bar{x} \leq 36) = 0.9866$$

- **ثانيا: توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي للعينة $\bar{x}$ عندما يكون حجم العينة صغير $n < 30$:**

في حالة سحب عينة عشوائية ذات حجم صغير $(n < 30)$ يجب أن يكون المجتمع الإحصائي الذي سحبت منه يتوزع توزيعا طبيعيا وهنا نميز حالتين هما:

أ. إذا كان لدينا مجتمع يتبع توزيع طبيعي بمتوسط μ وتباين σ^2 وسحبنا منه عينات عشوائية حجم كل منها n وكانت n صغيرة $(n < 30)$ فإن الوسط الحسابي لهذه العينات يتبع أيضا التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره $E(\bar{x})$ وتباين قدره $V(\bar{x})$ حيث:

- إذا كان السحب مع الإرجاع أو السحب بدون إرجاع من مجتمع غير محدود فإن:

$$E(\bar{x}) = \mu$$
$$V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

- إذا كان السحب بدون إرجاع من مجتمع محدود فإن:

$$E(\overline{x}) = \mu$$

$$V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} \times \frac{N-n}{N-1}$$

مثال:

إذا علمت أن الأجر اليومي للعامل في إحدى الشركات يتوزع توزيع طبيعي بمتوسط قدره 900 دج وانحراف معياري 90 دج قمنا بسحب عينة حجمها 10 عامل من بين عمال الشركة البالغ عددهم 60 عامل

المطلوب:

ما احتمال أن يكون متوسط الأجر اليومي في العينة يتراوح بين 850دج و950دج؟

الحل:

بما أن المجتمع يتوزع توزيع طبيعي فإن توزيع المعاينة لمتوسط العينة يتوزع أيضا توزيع طبيعي بمتوسط $E(\bar{x})$ وتباين قدره $V(\bar{x})$ أي:

$$\bar{x} \to N\big(E(\bar{x}); v(\bar{x})\big)$$

ولدينا:

- السحب مع الارجاع من مجتمع محدود
- كسر المعاينة $\frac{n}{N} = \frac{10}{60} = 0{,}17 > 0{,}05$ لذا لا يمكن اهمال معامل التصحيح

ومنه:

$$E(\bar{x}) = \mu = 900$$

$$v(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} \times \frac{N-n}{N-1} = \frac{90^2}{10} \times \frac{60-10}{60-1} = 686.44$$

وعليه:

$$p(850 \le \bar{x} \le 960) = p\left(\frac{850-900}{\sqrt{686.44}} \le \frac{\bar{x}-E(\bar{x})}{\sqrt{V(\bar{x})}} \le \frac{950-900}{\sqrt{686.44}}\right)$$

$$p(850 \le \bar{x} \le 960) = p(-1.91 \le Z \le 1.91)$$

$$p(850 \le \bar{x} \le 960) = F(1.91) - F(-1.91)$$

$$p(850 \le \bar{x} \le 960) = 2F(1.91)\_1$$

$$p(850 \le \bar{x} \le 960) = 2(0.9719) - 1 = 1.9438$$

ب. إذا كان المجتمع الذي سحبت منه العينات العشوائية ذات الحجم n حيث n أقل من 30 يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وتباين مجهول وكان السحب مع الارجاع أو بدون إرجاع من مجتمع غير محدود في هذه الحالة يصبح لدينا المتغير T حيث:

$$\boldsymbol{T = \frac{\bar{x} - E(\bar{x})}{\sqrt{\frac{s^2}{n-1}}} \rightarrow t_{n-1}}$$

بمعنى أن المتغير T في هذه الحالة يتبع توزيع ستيودنت بدرجة حرية قدرها $n-1$.

مثال:

إذا كانت أجور العاملين في مصنع للسيارات تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره 100 ون تم سحب عينة عشوائية من 26 عامل من هذه المؤسسة فوجدنا أن الإنحراف المعياري في هذه العينة 75 ون، أوجد احتمال أن يكون متوسط الأجور في العينة أقل من 131 ون

الحل:

$$n = 26 < 30$$

ومنه:

$$T = \frac{\bar{x} - E(\bar{x})}{\sqrt{\frac{s^2}{n-1}}} \rightarrow t_{n-1}$$

$$p(\bar{x} \leq 131) = p\left(\frac{\bar{x} - E(\bar{x})}{\sqrt{\frac{s^2}{n-1}}} \leq \frac{131 - 100}{\sqrt{\frac{75^2}{26-1}}}\right) = p(T \leq 2.06) = 0.975$$

3 توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي عينتين $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$:

إذا كان لدينا المتغير x_1 يتبع التوزيع الطبيعي $x_1 \rightarrow N(\mu_1, \sigma_1^2)$ وتم سحب عينة حجمها n_1 من مجتمعه والمتغير x_2 يتبع التوزيع الطبيعي أيضا $x_2 \rightarrow N(\mu_2, \sigma_2^2)$ وسحبت من مجتمعه عينة حجمها n_2 وكان المجتمعين مستقلين، فإن المتغير المعبر عنه بـ $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ يمثل متغيراً عشوائيا للفرق بين متوسطي العينتين حيث:[1]

$$\boldsymbol{E(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = E(\bar{x}_1) - E(\bar{x}_2)}$$

[1] اياد محمد الهوبي، الاحصاء التطبيقي، الكلية الجامعة للعلوم والتكنولوجيا، الطبعة الاولى، 2014، ص ص 45 46.

$$v(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = v(\bar{x}_1) + v(\bar{x}_2)$$

ونفرق هنا بين ثلاث حالات هي:

1.3.إذا كان σ_1^2 و σ_2^2 معلومين وحجم العينتين كبير $n_2, n_1 \geq 30$:

إذا سحبنا من مجتمع طبيعي وسطه μ_1 وتباينه σ_1^2 عينة كبيرة حجمها n_1، وسحبنا من مجتمع طبيعي ثاني وسطه μ_2 وتباينه σ_2^2 عينة حجمها n_2 كبيرة أيضا، فإن المتغير العشوائي المعبر عنه بـ $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ يتبع توزيع طبيعي وسطه الحسابي $E(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ وتباينه $v(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ **حيث:**

$$E(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = E(\bar{x}_1) - E(\bar{x}_2) = \mu_1 - \mu_2$$

$$v(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = v(\bar{x}_1) + v(\bar{x}_2) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

أي:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \to N\left(\mu_1 - \mu_2; \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

وبذلك يكون لدينا المتغير Z المعرف فيما يلي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري، أي:

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \to N(0, 1)$$

مثال:

تنتج شركة A مصابيح متوسط مدة حياتها 1400سا بانحراف معياري 200سا وتنتج شركةB مصابيح متوسط مدة حياتها 1200سا بانحراف معياري 100سا. قمنا باختيار عينة من 125وحدة من كلتا الشركتين مع الإعادة. أوجد احتمال أن الشركة Aتنتج مصابيح كهربائية متوسط مدة حياتها على الأقل أكبر بـ 160سا من عمر مصابيح الشركة ؟

الحل:

لدينا :

$\boldsymbol{\sigma_1^2} = 200$ و $\boldsymbol{\sigma_2^2} = 100$ و أن $n_1 = n_2 = 125$ وكليهما أكبر من 30 وبذلك يكون توزيع الفرق بين وسطي العينتين هو التوزيع الطبيعي حيث:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \rightarrow N((1400 - 1200); \frac{200^2}{125} + \frac{100^2}{125})$$

أي:

$$(\bar{\boldsymbol{x}}_1 - \bar{\boldsymbol{x}}_2) \rightarrow \boldsymbol{N}(\mathbf{200}, \mathbf{20}^2)$$

وبالمقابل يكون لدينا:

$$\boldsymbol{Z} = \frac{(\bar{\boldsymbol{x}}_1 - \bar{\boldsymbol{x}}_2) - \mathbf{200}}{\sqrt{\mathbf{20}^2}} \rightarrow \boldsymbol{N}(\mathbf{0}, \mathbf{1})$$

وعليه يكون الاحتمال المطلوب هو:

$$*p\big((\bar{x}_1 - \bar{x}_2) > 160\big) = p\left(\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-200}{20} > \frac{160-200}{20}\right)$$

$$= p(z > -2) = 1 - p(z < -2)$$

$$= 1 - F(-2) = 0.9772$$

2.3.إذا كان $\boldsymbol{\sigma_1^2}$ و $\boldsymbol{\sigma_2^2}$ مجهولين وحجم العينتين كبير $\boldsymbol{n_2, n_1 \geq 30}$:

في هذه الحالة فإن الفرق بين متوسطي العينتين $(\bar{\boldsymbol{x}}_1 - \bar{\boldsymbol{x}}_2)$ يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره: $(\mu_1 - \mu_2)$ وتباين قدره: $\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)$، ونكتب:

$$(\bar{\boldsymbol{x}}_1 - \bar{\boldsymbol{x}}_2) \rightarrow \boldsymbol{N}\left(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2; \frac{\boldsymbol{s}_1^2}{\boldsymbol{n}_1} + \frac{\boldsymbol{s}_2^2}{\boldsymbol{n}_2}\right)$$

مثال:

ينتج مصنع معلبات 700 علبة كمعدل يومي، سحبت منه عينة عشوائية تمثل إنتاج 39 يوماً يبلغ وسطها الحسابي 740 علبة بانحراف معياري 40 علبة. وينتج مصنع معلبات آخر 500 علبة كمعدل يومي، سحبت منه عينة عشوائية تمثل إنتاج 34 يوماً يبلغ وسطها الحسابي 480 علبة بانحراف معياري 20 علبة.

المطلوب:

1. ما هو التوزيع الاحتمالي للفرق بين متوسطي العينتين؟

2. أحسب الاحتمال التالي:

$$p(180 < \bar{x}_1 - \bar{x}_2 < 210)$$

الحل:

لدينا : $S_1^2 = 1600$ و $S_2^2 = 400$

ولدينا: $n_1 = 39$,$n_2 = 34$ وكليهما أكبر من 30 وبذلك يكون توزيع الفرق بين وسطي العينتين هو :

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \to N((700-500); \frac{1600}{39} + \frac{400}{34})$$

أي:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \to N(200, 52.78)$$

وبالمقابل يكون لدينا:

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - 200}{\sqrt{52.78}} \to N(0,1)$$

وعليه يكون الاحتمال المطلوب هو:

$$p(180 < \bar{x}_1 - \bar{x}_2 < 210) = p\left(\frac{180-200}{\sqrt{52.78}} < \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - 200}{\sqrt{52.78}} < \frac{210-200}{\sqrt{52.78}}\right)$$

$$= p(-2.75 < z < 1.37)$$
$$= F(1.37) - F(-2.75) \qquad = F(1.37) - 1 + F(2.75)$$
$$= 0.9147 - 1 + 0.9970 = 0.9117$$

ملاحظة: التوزيع أعلاه يصلح أيضا عند السحب من مجتمعين غير طبيعيين أو مجهولي التوزيع بشرط كبر حجم العينة، وذلك استنادًا لنظرية **النهاية المركزية.**

3.3. إذا كان σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين وحجم أحد العينتين على الأقل صغير:

إذا سحبنا من مجتمع طبيعي وسطه μ_1 وتباينه σ_1^2 عينة صغيرة حجمها n_1، وسحبنا من مجتمع طبيعي ثاني وسطه μ_2 وتباينه σ_2^2 عينة حجمها n_2 صغيرة أيضا، فإن المتغير العشوائي المعبر عنه بـ $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ يتبع توزيع ستودينت بدرجة حرية قدرها $(n_1 + n_2 - 2)$ حيث:

$$\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}} = t_{n_1+n_2-2}$$

مثال:

تم سحب عينتين عشوائيتين مستقلتين حجمهما $n_1 = 11$ و $n_2 = 15$ وتباينهما $S_1^2 = 16.4$ $S_2^2 = 22.5$ من مجتمعين طبيعيين، بحيث $(\mu_1 = \mu_2$ و $\sigma_1 = \sigma_2)$

أحسب الاحتمال التالي: $p(\bar{\boldsymbol{x}}_1 - \bar{\boldsymbol{x}}_2) > 2.5$.

الحل:

بما أن حجم n_1 و n_2 أقل من 30 نستعمل العلاقة التالية لتوزيع ستيودنت:

$$\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}} = t_{n_1+n_2-2}$$

وبما أن: $\mu_1 = \mu_2$ أي $\mu_1 - \mu_2 = 0$ يصبح لدينا:

$$p(\bar{\boldsymbol{x}}_1 - \bar{\boldsymbol{x}}_2) > 2.5$$

$$= p\left(\frac{(\bar{\boldsymbol{x}}_1 - \bar{\boldsymbol{x}}_2)}{\sqrt{\dfrac{(\mathrm{n}_1 - 1)\mathrm{S}_1^2 + (\mathrm{n}_2 - 1)\mathrm{S}_2^2}{\mathrm{n}_1 + \mathrm{n}_2 - 2}}} > \frac{2.5}{\sqrt{\dfrac{10.(16{,}4) + 14.(22{,}5)}{11 + 15 - 2}}}\right)$$

$$= p(\mathrm{t}_{11+15-2} > 0.127)$$

$$= p(\mathrm{t}_{24} > 0.127) = 1 - P(t_{22} \leq 0.127)$$
$$= 1 - 0.55 = 0.45$$

4 توزيع المعاينة لنسبة العينة $\boldsymbol{f}$:

إذا كان اهتمامنا منصبا على نسبة خاصية معينة في مجتمع ما، بحيث تعبر هذه النسبة عن احتمال النجاح p كنسبة الانتاج التالف في انتاج آلة معينة مثلا، وتم سحب عينات ذات حجم n من هذا المجتمع وقمنا بحساب نسبة هذه الصفة في كل عينة، سنجد أن $\boldsymbol{f}$ تتغير من عينة إلى أخرى، وبالتالي فهي متغير عشوائي له توزيع احتمالي يطلق عليه اسم توزيع المعاينة للنسبة، والذي يكون متوسطه $\boldsymbol{E(f)}$ وتباينه $\boldsymbol{v(f)}$ حيث:[1]

$$p = \frac{N_a}{N}$$
$$\boldsymbol{f} = \frac{\boldsymbol{n_a}}{\boldsymbol{n}}$$

علما أن:

N_a: عدد المفردات التي تحقق خاصية ما في مجتمع

N: حجم المجتمع

$\boldsymbol{n_a}$**:** عدد المفردات التي تحقق نفس الخاصية في حجم العينة

---

[1] موراي شبيجل ،جون شيلرأ الوسيرينيقسان ، ترجمة محمود أبو النصر و مصطفى جلال مصطفى ، الاحتمالات و الإحصاء، ملخصات شوم، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، الطبعة الاولى ، مصر ،2004، ص، 77. بتصرف

n: حجم العينة

ولقيم n الكبيرة لـ فإن f تتبع تقريبا التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره $E(f)$ وتباين قدره $v(f)$ ونكتب:

$$f \rightarrow N(E(f), V(f))$$

أي:

$$Z = \frac{f - E(f)}{\sqrt{V(f)}} \rightarrow N(0; 1)$$

حيث:

- إذا كان السحب مع الإرجاع أو السحب بدون إرجاع من مجتمع غير محدود

$$E(f) = p$$
$$v(f) = \frac{pq}{n}$$

- إذا كان السحب بدون إرجاع من مجتمع محدود فإن:

$$E(f) = p$$
$$v(f) = \frac{pq}{n} \times \frac{N-n}{N-1}$$

ملاحظة:

حتى يكون التقريب جيد بين التوزيع الثنائي والطبيعي، من الأفضل أن يكون جداء كل من np و np أكبر من 5.

مثال:

يضم قسم العلوم الاقتصادية بكلية العلوم الاقتصادية لجامعة سطيف 800 طالب، من بينهم 320 طالب راسب في مقياس الإحصاء، سحبنا عينة عشوائية بدون إعادة حجمها 100 طالب، ما احتمال أن تكون نسبة الراسبين في العينة أقل من 50%؟

الحل:

لدينا:

$$p = \frac{N_a}{N} = \frac{320}{800} = 0.4$$

وبما أن:

$$n = 100 \geq 30 \quad \text{و} \quad \frac{n}{N} = \frac{100}{800} = 0{,}125 > 0{,}05$$

ولأن السحب بدون إعادة فإن:

$$f \rightarrow N(E(f), V(f))$$

حيث:

$$E(f) = p = 0.4$$

$$v(f) = \frac{pq}{n} \times \frac{N-n}{N-1} = \frac{0,4 \times 0,96}{100} \times \frac{800-100}{800-1} = 0.0021$$

وبذلك يكون:

$$p(f < 0.5) = p\left(\frac{f - E(f)}{\sqrt{v(f)}} < \frac{0.5 - 0.4}{\sqrt{0.0021}}\right)$$

$$= p(z < 2,18) = 0.9854$$

5 توزيع المعاينة للفرق بين نسبتي عينتين $(f_1 - f_2)$:

إذا أخذت عينتين عشوائيتين حجمهما كبير $(n_1; n_2 \geq 30)$ من مجتمعين مستقلين، يخضع كل من الأول والثاني للتوزيع الطبيعي فإن الفرق بين نسبتي هاتين العينتين يتبع تقريبا التوزيع الطبيعي، بمتوسط قدره $E(f_1 - f_2)$ وتباين قدره $v(f_1 - f_2)$ حيث:

$$\boldsymbol{E(f_1 - f_2) = (p_1 - p_2)}$$
$$\boldsymbol{v(f_1 - f_2) = \left(\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}\right)}$$

ونكتب:

$$\boldsymbol{(f_1 - f_2) \rightarrow N\left(p_1 - p_2; \frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}\right)}$$

مثال:

إذا كانت نسبة المتعلمين من الإناث في القرية A 30% بينما نسبة المتعلمين من الإناث في القرية B 25 % سحبنا عشوائيا عينة من كل قرية حجم كل منهما 200 أنثى، ما احتمال أن تكون نسبة المتعلمات في القرية B أكبر من نسبة المتعلمات في القرية A الأولى؟

الحل:

لدينا:

$$p_1 = 0.3 \quad , \quad p_2 = 0.25 \quad , \quad q_1 = 0.7 \quad , \quad q_2 = 0.75 \ , n_1 = 200 \ , n_2 = 200$$

إيجاد احتمال أن تكون نسبة المتعلمات في القرية B أكبر من نسبة المتعلمات في القرية A الأولى أي:

$$p(f_2 > f_1) = p(f_1 - f_2 \leq 0)$$
$$= p\left(\frac{(f_1 - f_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}} \leq \frac{0 - 0{,}05}{\sqrt{\frac{0{,}3.0{,}7}{200} + \frac{0{,}25.0{,}75}{200}}}\right)$$
$$= p(z \leq -1.12) = 1 - p(z \leq 1.12) = 1 - 0.8686 = 0.1314$$

6 توزيع المعاينة لتباين عينة s^2:

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها $\boldsymbol{n}$ من مجتمع ما غير محدود تباينه σ^2 فإن متوسط تباين العينة $E(s^2)$ يعطى بالعلاقة:

$$\boldsymbol{E(s^2) = \sigma^2}$$

أما إذا كان السحب بدون إرجاع من مجتمع محدود فإن:

$$\boldsymbol{E(s^2) = \frac{N}{N-1} \times \sigma^2}$$

حيث يعطى تباين العينة بالعلاقة التالية:

$$\boldsymbol{s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}$$

ملاحظة:

إذا تم سحب عينات عشوائية حجمها n عنصر من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وانحراف معياري σ فإن المتغير العشوائي المعطى بالعلاقة التالية:

$$\boldsymbol{\frac{(n-1).s^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{\sigma^2}}$$

يتبع توزيع **كاي تربيع** بدرجة حرية $\boldsymbol{n-1}$، أي:

$$\boldsymbol{\frac{(n-1).s^2}{\sigma^2} \rightarrow K_{n-1}^2}$$

مثال:

تقوم آلة بقطع أسلاك معدنية لاستخدامها في صنع قطع غيار معينة، إذا اعتبرنا أن أوزان القطع المنتجة متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره 30 غ وانحراف معياري 0.5 غ. وتم سحب عينة من 25 قطعة من انتاج هذه الآلة، **والمطلوب:** ما احتمال أن يكون تباينها أكبر من 0.38 غ؟

الحل:

*حساب احتمال أن يكون تباين العينة أكبر من 0.38 غ، أي:

$$\boldsymbol{p(s^2 > 0.38) = ?}$$

نعلم أن:

$$\frac{\boldsymbol{(n-1).s^2}}{\boldsymbol{\sigma^2}} \rightarrow \boldsymbol{K^2_{n-1}}$$

ومنه:

$$p(s^2 > 0.38) = p\left(\frac{(\mathrm{n}-1)\mathrm{s}^2}{\sigma^2} > \frac{24 \times 0{,}38}{0{,}5^2}\right) = p(k^2_{24} > 36{,}4)$$
$$= 1 - p(k^2_{24} \leq 36{,}4)$$

وبالنظر إلى جدول توزيع كاي تربيع نجد أن القيمة الجدولية 36.4 تقابل إحتمال قدره 0.95 وهذا عند درجة حرية قدرها 24 وبذلك يصبح لدينا:

$$p(s^2 > 0.38) = 1 - 0.95 = \mathbf{0.05}$$

7 توزيع المعاينة لنسبة تبايني عينتين $\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\right)$:

يعتبر هذا التوزيع من التوزيعات الهامة التي تبحث في تجانس المجتمعات حيث نلجأ إلى حساب النسب بين التباينات وليس الفرق بينها وذلك لسهولة دراسة النسب وتفسيرها. فإذا سحبت عينة حجمها n_1 وتباينها S_1^2 من مجتمع طبيعي $N(\mu_1;\ \sigma_1^2)$ وعينة أخرى حجمها n_2 وتباينها S_2^2 من مجتمع طبيعي أيضا $N(\mu_2;\ \sigma_2^2)$ مستقل عن المجتمع الأول فإن المتغير المعطى بالعلاقة التالية[1]:

$$\boldsymbol{F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}}$$

يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية $(n_1 - 1)$ و $(n_2 - 1)$ ونكتب:

$$\boldsymbol{\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \rightarrow F(n_1 - 1;\ n_2 - 1)}$$

وإذا تساوى تبايني المجتمعين فإن:

---

[1] جمال رشيد الكحلوت، مرجع سبق ذكره، ص.8.

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} \to F(n_1 - 1;\ n_2 - 1)$$

مثال:

لدينا عينتين عشوائيتين حجم العينة الأولى 11 سحبت من مجتمع طبيعي تباينه 9، وسحبت عينة أخرى حجمها 27 من مجتمع طبيعي أيضا تباينه 25 مستقل عن المجتمع الأول. **والمطلوب:** أوجد احتمال أن تكون النسبة بين تبايني العينتين أقل من 0.8.

الحل:

لدينا:

$$F = \frac{S_1^2/9}{S_2^2/25} \to F(10;\ 26)$$

$$p\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} < 0.8\right) = p\left(\frac{S_1^2/9}{S_2^2/25} < (0.8)\left(\frac{25}{9}\right)\right)$$

$$= \ p\left(F_{10;26} < 2.22\right) = 0.95$$

IV. تمارين مقترحة للمحور الأول:

أسئلة نظرية:

1- ما الفرق بين المعلمة والإحصائية؟

2- لماذا نلجأ للمعاينة بدل الدراسة الشاملة؟

3- ما هي المعاينة التي تسمح لكل مفردة من مفردات المجتمع نفس احتمال الظهور في العينة؟

4- ما هي العلاقة بين حجم العينة وأخطاء المعاينة العشوائية؟

5- ما هي العلاقة بين تباين المجتمع وأخطاء المعاينة العشوائية؟

التمرين الأول:

في إحدى المؤسسات يتم اختيار مجموعة من عمالها في كل عام لإرسالهم لأداء مناسك العمرة إذا علمت أن عدد عمال المؤسسة هو 820 عامل استخرج عينة المستفيدين والمكونة من 10 عمال باستخدام المعاينة المنتظمة

التمرين الثاني:

لدينا مجتمع مكون من 24 أسرة والمصاريف الأسبوعية مقدرة بالدينار لكل أسرة هي على النحو التالي:
5000. 4000. 1500. 4100. 3400. 3300. 3500. 55000. 58000. 1800. 1700.
3000.3700. 3800. 3200. 3900. 1400. 1600. 1900. 54000. 43000. 52000.
66000. 2900

تم سحب عينة طبقية من هذا المجتمع مكونة من 8 أسر

- كيف يتم تشكيل هذه العينة الطبقية مع تحديد عناصرها

التمرين الثالث:

صمّمت آلة صناعية لإنتاج قطع غيار من نوع معين بوزن متوسط مقداره 20غ بانحراف معياري قدره 1غ، بغرض مراقبة هذه الآلة تمّ سحب عينة عشوائية من 100 وحدة من إنتاج هذه الآلة. ليكن $\bar{X}$ متوسط وزن قطع الغيار في هذه العينة .

- ما هي المواصفات الإحصائية لكي نقبل ب $\bar{X}$ كمقدر جيد لـ μ (التسمية و العلاقات الرياضية).
- ما هو القانون الاحتمالي ل $\bar{X}$؟ ثم أحسب $E(\bar{X})$ و $V(\bar{X})$.
- أحسب الاحتمالات التالية: $P(\bar{X} \leq 20.1)$ ، $P(20.1 \leq \bar{X} \leq 20.3)$

التمرين الرابع:

تقدر نسبة نجاح الطالبات في جامعة ما بـ 80% بينما تقدر نسبة نجاح الطلبة بـ 72% تم سحب عينتين من مجتمعي الطالبات والطلبة 100و 80على التوالي.

- أوجد توزيع المعاينة للفرق بين نسبة نجاح الطالبات ونسبة نجاح الطلاب.
- ما هو التوزيع التقريبي للفرق بين النسبتين.
- ما احتمال أن تكون نسبة نجاح الطالبات أكبر من نسبة نجاح الطلاب ب 15%؟

التمرين الخامس:

مجتمع طبيعي تباينه مقدّر ب 15، إذا سحبنا مع الإرجاع عينة حجمها n=5 .

- أحسب احتمال أن يكون تباين العينة أقل من10.5.
- أحسب احتمال أن يكون تباين العينة محصور بين 31.8 و 33.3

المحور الثاني:

مجال الثقة

تمهيد:

إن دراسة الباحث للعينات وتوزيعاتها عن طريق إحصاءاتها المحددة يهدف إلى الاستدلال على المعالم المناظرة لها في المجتمع، إلا أن تلك القيم التي يتم الحصول عليها عن طريق المعاينة لا تعكس بالضرورة القيم الحقيقية المناظرة لها مما يدفع الباحث إلى تقدير تلك المعالم أو المجالات التي تقع ضمنها بدرجة ثقة معينة، ومن خلال هذا المحور سنتعرف على شروط التقدير الجيد وأنواع التقدير وبعض نظرياتها.

I. مفاهيم ومصطلحات:

فيما يلي سنتطرق لأهم المفاهيم المتعلقة بالتقدير لتبسيط فهم وبناء مجالات الثقة لمختلف معالم المجتمع

1. مفهوم التقدير:

يعرف التقدير بأنه: عملية استنتاج أو تقدير أحد معالم المجتمع (مثل الوسط الحسابي أو الانحراف المعياري) من الإحصائية المناظرة والخاصة بعينة مسحوبة من المجتمع.[1] ويوجد نوعان من التقدير الإحصائي وهما:

- **التقدير النقطي:**

عندما نقدر معلمة المجتمع برقم واحد يحسب من بيانات العينة فإن هذا الرقم يسمى تقدير نقطي لهذه المعلمة والذي يحسب اعتمادا على المقدر النقطي لهذه المعلمة، أي أن المقدر هو الصيغة الرياضية أو الإحصائية التي نقدر بها معلمة المجتمع بينما التقدير هو القيمة العددية لهذه الإحصائية.[2]

- **التقدير بمجال:**

التقدير بمجال أو مجال الثقة فنتحصل من خلاله على مجال معرف بحدين (حد أدنى وحد أعلى) نحصل عليهما من العينة نلاحظ هنا أن التقدير بمجال (أو تقدير الفترة) يحتوي على أكثر من قيمة بل قد يكون عدد القيم غير محدود أو لا نهائياً في كثير من الحالات فمثلا إذا قدرنا الوسط الحسابي لأعمار الناخبين يتراوح ما

[1] دومينيك سالفادور، الإحصاء والاقتصاد القياسي، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1993، ص 72.

[2] ديفيد جيه هاند. علم الاحصاء: مقدمة صغيرة جدا. ترجمة: أحمد شكل، الطبعة الأولى، مؤسسة هنداوي للنشر، مصر، 2016، ص .78-79.

بين 43 و46 سنة أي يتراوح بين 34 سنة كحد أدنى و46 سنة كحد أعلى نكون قد حصلنا على تقدير مجال للوسط الحسابي لأعمار الناخبين في المجتمع.[1]

2. خصائص المقدر الجيد:

لتقدير معلمة من معالم المجتمع محل دراسة، نحتاج إلى اختيار الإحصائية المناسبة في العينة لتقدير هذه المعلمة، وبصفة عامة يعتبر المقدر جيدا إذا توفرت فيه الخصاص التالية: [2]

1.2. عدم التحيز:

نقول عن المقدر $\boldsymbol{\hat{\theta}}$ أنه غير متحيز للمعلمة $\boldsymbol{\theta}$ إذا كان التوقع الرياضي لـ $\boldsymbol{\hat{\theta}}$ يساوي المقدار نفسه ونعبر عن ذلك رياضيا كالتالي:

$$\boldsymbol{E(\hat{\theta}) = \theta}$$

أما إذا كان $E(\hat{\theta}) \neq \theta$ فهذا يعني أن $\hat{\theta}$ مقدر متحيز للمعلمة θ أي أنه لا يمثل المعلمة تمثيلا صحيحا، حيث يُعبر عن مقدار التحيز **b** بالصيغة التالية:

$$\boldsymbol{E(\hat{\theta}) - \theta = b}$$

مثال:

ليكن $\boldsymbol{x}$ متغير عشوائي حيث:

$$E(x) = \mu \quad \text{و} \quad V(x) = \sigma^2$$

غالبا ما يكون وسط المجتمع μ مجهول لذلك يتم تقديره بوسط العينة $\bar{x}$ لما يتميز به هذا الأخير من خصائص منها عدم التحيز حيث يكون $\bar{x}$ غير متحيز لـ µ

إذا كان:

$$E(\bar{x}) = \mu$$
$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

فإن:

---

[1] Olive jean dunn , Virginia A.Clarck, Basic Stastics , Fourth Edition , A jhon wlley & sons publication , United States of America., 2009, PP 79-81

[2] علي أحمد السقاف. الاحصاء الوصفي والاستدلالي. الطبعة الأولى، إصدار المركز الديمقراطي العربي، برلين المانيا، 2020، ص.116.

$$E(\bar{x}) = E\left(\frac{\sum x_i}{n}\right) = \frac{1}{n}.\sum E(x_i) \ldots\ldots\ldots..(1)$$

ومن جهة أخرى نعلم أن:

$$E(x) = \mu$$

وعليه تصبح العلاقة (1) كما يلي:

$$E(\bar{x}) = \frac{1}{n}.n.\mu = \boldsymbol{\mu}$$
$$\boldsymbol{E(\bar{x}) = \mu}$$

وبذلك يمكن القول أن وسط العينة $\bar{x}$ هو مقدر غير متحيز لوسط المجتمع μ.

2.2. معيار التقارب أو التوافق:

نقول عن المقدر $\boldsymbol{\hat{\theta}}$ أنه متقارب إذا كانت قيمته تؤول إلى قيمة المعلمة $\boldsymbol{\theta}$ كلما زاد حجم العينة، أي أنّ تباينه يؤول إلى الصفر عندما تؤول n إلى مالا نهاية أو إلى حجم المجتمع N، أي :

$$\left\{\boldsymbol{v(\hat{\theta})} \xrightarrow[\boldsymbol{n\to\infty(N)}]{} \boldsymbol{0}\right.$$

مثال:

نفرض أن x متغير عشوائي حيث:

$$E(x) = \mu \quad \text{و} \quad v(x) = \sigma^2$$

يكون $\bar{x}$ مقدر مقارب لـ μ أو متماسك إذا كان:

$$\left\{\bar{x} \xrightarrow[n\to\infty(N)]{} \mu\right.$$

أي:

$$\left\{v(\bar{x}) \xrightarrow[n\to\infty(N)]{} 0\right.$$

لدينا:

$$v(\bar{x}) = v\left(\frac{\sum x_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2}.n.v(x) \ldots\ldots\ldots(2)$$
$$v(x) = \sigma^2$$

وعليه تصبح العلاقة (2) كما يلي:

$$V(\bar{x}) = \frac{1}{n^2}.n.\sigma^2 = \boldsymbol{\frac{\sigma^2}{n}}$$

ومن جهة أخرى نلاحظ أن المقدار $\frac{\sigma^2}{n}$ يؤول فعلا إلى الصفر عندما يؤول n إلى $\infty(N)$ ومنه يمكن القول أن متوسط العينة هو مقدر **مقارب** لـ وسط المجتمع μ أي أنه متماسك.

3.2. الكفاءة أو الفعالية:

إذا كان $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$ مقدرين غير متحيزين للمعلمة θ وكان تباين $\hat{\theta}_1$ أقل من تباين $\hat{\theta}_2$ ، أي:

$$v\left(\hat{\theta}_1\right) < v\left(\hat{\theta}_2\right)$$

في هذه الحالة فإننا نقول أنّ المقدر $\hat{\theta}_1$ أكثر كفاءة من المقدر $\hat{\theta}_2$ ، ومنه فالمقدر الفعال هو المقدر ذو التباين الأصغر.

II. التقدير بمجال:

عادة ما يتم تقدير معالم المجتمع من خلال المقدرات المقابلة لها في العينة وعموما لا يمكن توقع الحصول على تقدير لمعلمة المجتمع بدون خطأ مهما كان المقدر جيدا، لذا من الأفضل تحديد مجال حول هذا المقدر نتوقع بثقة معينة أن تقع فيه القيمة الحقيقية للمعلمة المجهولة ويسمى هذا المجال بمجال الثقة أو فترة الثقة حيث نسبة الحظوظ أو احتمال أن تقع معلمة المجتمع θ في هذا المجال تسمى درجة الثقة أو مستوى الثقة وبذلك نكون قد قدرنا معلمة المجتمع بمجال ونكتب:

$$IC(\theta)_{1-\alpha} = [T_1; T_2]$$

أي:

$$p(\theta \epsilon [T_1; T_2]) = 1 - \alpha$$

حيث:

$T_2; T_1$: هما على التوالي الحد الأدنى والحد الأعلى لمجال الثقة، مع $T_1 < T_2$ ؛

$1 - \alpha$: مستوى الثقة أو درجة الثقة؛

α : احتمال الخطأ أو مستوى المعنوية أو درجة المخاطرة والذي يعبر عن احتمال عدم احتواء مجال الثقة على القيمة الحقيقية لـ θ والتي عادة ما تكون من اختيار الباحث حسب درجة الدقة التي يبحث عنها.

1. مجال الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع μ:

عادة ما يكون متوسط المجتمع مجهولا ويتم تقديره بواسطة الوسط الحسابي للعينة وفي حالة التقدير بجال نميز حالين هما:

1.1 إذا كان حجم العينة كبير ($n \geq 30$):

نعلم أنه في هذه الحالة $\bar{x}$ يتبع تقريبا التوزيع الطبيعي حيث:

$$Z = \frac{\bar{x} - E(\bar{x})}{\sqrt{V(\bar{x})}} \rightarrow N(0;1)$$

لبناء مجال الثقة لـ μ يُمكن أن ننطلق من مفهوم مجال الثقة كما يلي:

$$p(\mu \in IC) = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow p(\mu \in [T_1; T_2]) = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow p(T_1 \leq \mu \leq T_2) = 1 - \alpha$$

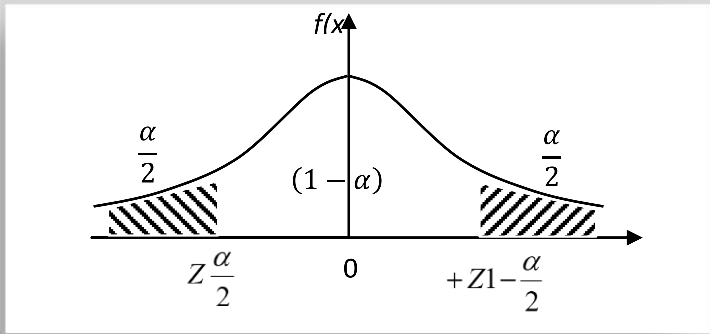
ينبغي إذن تحديد حدود مجال الثقة T_1و T_2 انطلاقا من حصر Z بين قيمتين حيث:

$$\boldsymbol{Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{v(\bar{x})}}}$$

لأن $\mu = E(\bar{x})$ في كل الحالات.

ويمكن توضيح ذلك بيانيا من خلال الشكل الموالي :

شكل رقم (5): تمثيل بياني لكيفية حصر z بين قيمتين



المصدر: من إعداد الباحثة

يعني الشكل أعلاه أن:

$$\boldsymbol{p\left(z_{\frac{\alpha}{2}} \leq z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha}$$

ومن خاصية التناظر نستنتج أن:

$$\boldsymbol{z_{\frac{\alpha}{2}} = -z_{1-\frac{\alpha}{2}}}$$

ومنه يصبح لدينا:

$$p\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

وبتعويض قيمة z بما تساويه نجد:

$$p\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{v(\bar{x})}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

وبضرب أطراف المتراجحة في $\sqrt{v(\bar{x})}$نجد:

$$p\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{v(\bar{x})} \leq \bar{x}-\mu \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{v(\bar{x})}\right) = 1-\alpha$$

ثم بطرح قيمة $\bar{x}$من أطراف المتراجحة نجد:

$$p\left(-\bar{x}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{v(\bar{x})} \leq -\mu \leq -\bar{x}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{v(\bar{x})}\right) = 1-\alpha$$

نضرب الآن أطراف المتراجحة في -1 فيتغير اتجاهها وتصبح كما يلي:

$$p\left(\bar{x}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{v(\bar{x})} \leq \mu \leq \bar{x}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{v(\bar{x})}\right) = 1-\alpha$$

هذا يعني أن مجال الثقة لـ μ هو:

$$IC(\mu)_{(1-\alpha)\%} = \left[\bar{x}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{v(\bar{x})}\,;\bar{x}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{v(\bar{x})}\right]$$

حيث:

- إذا كان السحب مع الإرجاع أو بدون إرجاع من مجتمع غير محدود

أ. إذا كان σ^2 معلوم فإن:

$$IC(\mu)_{(1-\alpha)\%} = \left[\bar{x}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\;;\bar{x}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

ب. إذا كان σ^2 مجهول فإن:

$$IC(\mu)_{(1-\alpha)\%} = \left[\bar{x}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{s}{\sqrt{n}}\;;\bar{x}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

- إذا كان السحب بدون إرجاع من مجتمع محدود و $\frac{n}{N} > 0.05$

أ. إذا كان σ^2 معلوم فإن:

$$IC(\mu)_{(1-\alpha)\%} = \left[\bar{x}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\;;\bar{x}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right]$$

ب. إذا كان σ^2 مجهول فإن:

$$\boldsymbol{IC(\mu)_{(1-\alpha)\%}} = \left[\boldsymbol{\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{s}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\ ;\bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{s}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}\right]$$

مثال:

بهدف معرفة متوسط استهلاك الكهرباء في مدينة سطيف تم سحب عينة من هذه المدينة حجمها 200 أسرة فوجد أن متوسط استهلاك الأسرة 150 كيلو واط شهريا بانحراف معياري 50,125

قدر بمجال متوسط استهلاك الكهرباء في مدينة سطيف عند مستوى معنوية 5% ثم اشرح النتيجة

الحل:

بما أن:

$$s^2 = 50.125^2 \quad ; \qquad n = 200 \geq 30$$

فإن $\bar{x}$ يتبع التوزيع الطبيعي، ومجال الثقة لـ μ يعطى بالصيغة التالية:

$$IC(\mu)_{(1-\alpha)\%} = \left[\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{s}{\sqrt{n}}\ ;\bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

حيث:

$$\mu =? \quad ; \quad (1-\alpha) = 95\% \Rightarrow \alpha = 5\% \quad ; \quad \bar{x} = 150\ ;$$
$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{50.125}{\sqrt{200}} = 3.54 \quad ; \ z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \ z_{1-\frac{0.05}{2}} = \ z_{0.975} = 1.96$$

ومنه:

$$IC(\mu)_{(95)\%} = [143.06\ ; 156.94]$$

شرح النتيجة:

متوسط استهلاك الكهرباء في مدينة سطيف يتراوح بين 143.06 156,94 كيلو واط بمستوى ثقة 95 %.

2.1 إذا كان حجم العينة صغير $(n < 30)$:

عرفنا في محور المعاينة أنه إذا كان لدينا مجتمع يتبع توزيع طبيعي بمتوسط μ وتباين σ^2 وسحبنا منه عينات عشوائية حجم كل منها n وكانت n صغيرة $(n < 30)$ فإن الوسط الحسابي لهذه العينات يتبع أيضا التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره $E(\bar{x})$ وتباين قدره $V(\bar{x})$ ومنه:

- إذا كان السحب مع الإرجاع أو السحب بدون إرجاع من مجتمع غير محدود فإن:

$$\boldsymbol{IC(\mu)_{(1-\alpha)\%} = \left[\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ; \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]}$$

- إذا كان السحب بدون إرجاع من مجتمع محدود و $\boldsymbol{\frac{n}{N} > 0.05}$ فإن:

$$\boldsymbol{IC(\mu)_{(1-\alpha)\%} = \left[\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\ ; \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right]}$$

أما إذا كان $\boldsymbol{n} < 30$ و $\boldsymbol{x}$ يتوزع طبيعيا مع $\boldsymbol{\sigma^2}$ مجهول فإن:

$$\boldsymbol{T = \frac{\bar{x} - E(\bar{x})}{\sqrt{V(\bar{x})}} \to t_{n-1}}$$

وبذلك يكون مجال الثقة لـ μ في هذه الحالة كما يلي:

$$\boldsymbol{IC(\mu)_{(1-\alpha)\%} = \left[\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}.\frac{S}{\sqrt{n}}\ ; \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}.\frac{S}{\sqrt{n}}\right]}$$

مثال:

إذا كانت أجور العمال لإحدى الشركات تتبع التوزيع الطبيعي وتم اختيار عينة من 25 عامل فوجد أن متوسط أجرهم الشهري 4250 ون والانحراف المعياري 416,67. والمطلوب: إيجاد مجال الثقة (قدر بمجال) لمتوسط الأجر الشهري لعمال المصنع كله بدرجة ثقة 95%.

الحل:

لدينا:

$$\mu = ?\ ;\quad (1-\alpha) = 95\% \Rightarrow \alpha = 5\%\ ;\ \bar{x} = 4250\ ;$$
$$S = 416{,}67\ \left(\sigma^2 \text{مجهول}\right)\ ;\quad n = 25 < 30$$

و $x \to N(\mu\,,\sigma^2)$ ، في هذه الحالة نستخدم توزيع ستيودنت ويكون مجال الثقة لـ μ كما يلي:

$$IC(\mu)_{(1-\alpha)\%} = \left[\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2};\,n-1}.\frac{S}{\sqrt{n}}\ ; \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2};\,n-1}.\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

حيث:

$$t_{1-\frac{\alpha}{2};\, n-1} = t_{1-\frac{0.05}{2};\, 25-1} = t_{0.975;\, 24} = 2.06$$

ومنه:

$$IC(\mu)_{(95)\%} = \left[4250 - 2.06 \times \frac{416,67}{\sqrt{25}}\ ; 4250 + 2.06 \times \frac{416,67}{\sqrt{25}}\right]$$

$$= [4081.80\ ; 4418.20]$$

2. مجال الثقة للفرق بين وسطي مجتمعين $\boldsymbol{\mu_1 - \mu_2}$:

اعتمادا على ما تم التطرق إليه في محور المعاينة والخاص بتوزيع المعاينة لوسطي عينتين يمكن بناء مجالات الثقة للفرق بين وسطي مجتمعين وفقا للحالات التالية مع الإشارة إلى أننا نستخدم معامل التصحيح إذا دعت الضرورة إلى ذلك وفق القواعد السابقة:

- **إذا كان $\boldsymbol{\sigma_1^2}$ و $\boldsymbol{\sigma_2^2}$ معلومين وحجم العينتين كبير $\boldsymbol{n_2, n_1 \geq 30}$**

$$IC(\mu_1 - \mu_2)_{(1-\alpha)\%} = \left[(\boldsymbol{\bar{x}_1} - \boldsymbol{\bar{x}_2}) \mp z_{1-\frac{\alpha}{2}} . \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\ \right]$$

مثال:

عينة عشوائية حجمها80 و متوسطها 1680 سحبت من مجتمع انحرافه المعياري 500 وعينة عشوائية ثانية حجمها 75 ومتوسطها 1200 سحبت من مجتمع انحرافه المعياري 600

–ماهي فترة الثقة عند % 99 للفرق بين متوسطي المجتمعين؟

الحل:

لدينا:

$$IC(\mu_1 - \mu_2)_{(1-\alpha)\%} = \left[(\boldsymbol{\bar{x}_1} - \boldsymbol{\bar{x}_2}) \mp z_{1-\frac{\alpha}{2}} . \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\ \right]$$

ومنه:

$$IC(\mu_1 - \mu_2)_{(1-\alpha)\%} = \left[(1680 - 1200) \mp z_{1-\frac{0,01}{2}} . \sqrt{\frac{500^2}{80} + \frac{600^2}{75}}\ \right]$$

$$IC(\mu_1 - \mu_2)_{(1-\alpha)\%} = [250, 710\ ]$$

- **إذا كان $\boldsymbol{\sigma_1^2}$ و $\boldsymbol{\sigma_2^2}$ مجهولين وحجم العينتين كبير $\boldsymbol{n_2, n_1 \geq 30}$**

$$IC(\mu_1-\mu_2)_{(1-\alpha)\%}=\left[(\bar{x}_1-\bar{x}_2)\mp z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}\right]$$

- **إذا كان σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين وحجم أحد العينتين على الأقل صغير**

$$IC(\mu_1-\mu_2)_{(1-\alpha)\%}=\left[(\bar{x}_1-\bar{x}_2)\mp t_{n_1+n_2-2,1-\frac{\alpha}{2}}\ .\sqrt{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+\ n_2-\ 2}}}\right]$$

3. مجال الثقة لنسبة المجتمع P:

نعلم أنه من أجل القيم الكبيرة لـ n ($30\le$ n) فإن f تتبع تقريبا التوزيع الطبيعي بمتوسط $E(f)$ وتباين $v(f)$ وبذلك فإن مجال الثقة لـP يتحدد بتعويض μ بـ P و $\bar{x}$ بـ f و$\sqrt{v(\bar{x})}$ بـ $\sqrt{v(f)}$ في مجال الثقة لـ μ ليصبح كما يلي:

- إذا كان السحب مع الارجاع أو السحب بدون إرجاع من مجتمع غير محدود فإن:

$$\mathrm{IC(p)}_{(1\text{-}\propto)\%}=\left[\text{f-Z}_{1\text{-}\frac{\propto}{2}}.\sqrt{\frac{\text{f(1-f)}}{\text{n}}};\text{f}+\text{Z}_{1\text{-}\frac{\propto}{2}}.\sqrt{\frac{\text{f(1-f)}}{\text{n}}}\right]$$

- إذا كان السحب بدون إرجاع من مجتمع محدود و $\frac{n}{N}>0,05$

$$\mathbf{IC(p)}_{(1-\propto)\%}=\left[\mathbf{f}-\mathbf{Z}_{1-\frac{\propto}{2}}.\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}};\mathbf{f}+\mathbf{Z}_{1-\frac{\propto}{2}}.\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right]$$

مثال:

بغرض تقدير نسبة الطلبة الذين يتم توجيههم إلى السنة الثالثة في كلية العلوم الاقتصادية وفقا لرغباتهم أجريت دراسة إحصائية على عينة حجمها 500 طالب، فتبين أن 100 طالب من هذه العينة يتم توجيههم وفقا لرغبتهم. أوجد بدرجة ثقة 99% نسبة الطلبة الذين يتم توجيههم وفقا لرغبتهم في كلية العلوم الاقتصادية.

الحل:

لدينا:

$$\text{p}=?\quad;\quad(1-\alpha)=99\%\Rightarrow\alpha=\mathbf{1}\%\quad;\quad f=\frac{100}{500}=\mathbf{0.2}\ ;\qquad n=500\ge\mathbf{30}$$

ومنه فإن مجال الثقة لـ p هو :

$$IC(P)_{(1-\propto)\%}=\left[f-Z_{1-\frac{\propto}{2}}.\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}};f+Z_{1-\frac{\propto}{2}}.\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]$$

حيث:

$$\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}=\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{500}}=0.018$$

$$\mathrm{Z}_{1-\frac{\propto}{2}}=\mathrm{Z}_{1-\frac{0.01}{2}}=\mathrm{Z}_{0.995}=2.58$$

ومنه:

$$\mathrm{IC(P)}_{(99)\%}=[0.2-2.58\times0.018\,;0.2+2.58\times0.018]$$

$$=[0.1536\,;0.2464]$$

أي:

$$=[15.36\%\,;24.64\%]$$

وبذلك يمكن القول أن نسبة الطلبة الذين يتم توجيههم وفقا لرغبتهم في كلية العلوم الاقتصادية تقع بين 15.36 % و24.64% وهذا بدرجة ثقة قدرها 99%.

4. مجال الثقة للفرق بين نسبتي مجتمعين (P_1-P_2):

إذا أخذت عينتين عشوائيتين حجمهما كبير $(\mathrm{n}_1;n_2\geq30)$ من مجتمعين مستقلين، يخضع كل من الأول والثاني للتوزيع الطبيعي فإن مجال الثقة للفرق بين نسبتي هذين المجتمعين يكون بالصيغة التالية:

$$\boldsymbol{IC(P_1-P_2)_{(1-\propto)\%}}=\left[\boldsymbol{f_1-f_2\mp Z_{1-\frac{\propto}{2}}.\sqrt{\frac{f_1(1-f_1)}{n_1}+\frac{f_2(1-f_2)}{n_2}}}\right]$$

ملاحظة:

نستخدم معامل التصحيح إذا دعت الضرورة إلى ذلك وفق القواعد السابقة

مثال:

في عينة عشوائية مؤلفة من 400 أنثى و600 ذكرا اجتازوا امتحانا معينا فكانت النتائج نجاح 100 أنثى و300 ذكر

أوجد بدرجة ثقة 95% الفرق بين نسبة الذكور ونسبة الإناث الناجحين في هذا الامتحان

الحل:

لدينا:

$$n_1 = 400$$
$$n_2 = 600$$

ومنه:

$$IC(P_1 - P_2)_{(1-\propto)\%} = \left[f_2 - f_1 \mp Z_{1-\frac{\propto}{2}} . \sqrt{\frac{f_2(1-f_2)}{n_2} + \frac{f_1(1-f_1)}{n_1}} \right]$$

حيث:

$$f_1 = \frac{100}{400} = 0{,}25$$
$$f_2 = \frac{300}{600} = 0{,}5$$
$$Z_{1-\frac{\propto}{2}} = 1{,}96$$

وعليه:

$$IC(P_1 - P_2)_{(1-\propto)\%} = [0{,}192 \ . \ \ 0{,}308]$$

5. **مجال الثقة لتباين المجتمع** $\boldsymbol{\sigma}^2$:

كما هو معلوم فإن للتباين أهمية كبيرة، حيث أنه يحدد لنا مجال انتشار البيانات حول وسطها الحسابي. ولا يخفى أن هذه المعلومة الإحصائية تحدد لنا طبيعة التوزيع الإحصائي. أما في الحياة العملية، فإنه يحدد لنا خصوصا مدى جودة المخرجات من حيث تشابهها ودرجة الاختلافات الموجودة بينها، ولتحديد فترة ثقة لتباين مجتمع أو الانحراف المعياري للمجتمع نعلم أنه إذا كان لدينا عينات عشوائية حجمها n عنصر من مجتمع طبيــعي فإن المتغير $\frac{\boldsymbol{nS^2}}{\boldsymbol{\sigma^2}}$ يتبع توزيع كاي مربع بدرجة حرية (n–1) حيث: S^2 هو تباين العينة و σ^2 هو تباين المجتمع. وعليه فإن مجال الثقة لـ σ^2 يعطى بالشكل التالي:

$$\mathbf{IC}\left(\boldsymbol{\sigma}^2\right)_{(\mathbf{1}-\propto)\%} = \left[\frac{(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})\ \boldsymbol{s}^2}{\mathbf{K}^2_{\mathbf{1}-\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}};\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}} \ ; \frac{(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})\ \boldsymbol{s}^2}{\mathbf{K}^2_{\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}};\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}} \right]$$

مثال:

تبين من أحد الدراسات التي تمت على عينة من 20 شخص في أحد المناطق أن ضغط الدم للمجموعة يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 90 وانحراف معياري 9.

أوجد مجال الثقة لتباين المجتمع عند درجة ثقة 95%.

الحل:

$$\sigma^2 = ? \ \ ; \ \ (1-\alpha) = 95\% \Rightarrow \alpha = \mathbf{5}\% \ \ ; \ \ S = 9 \ ; \ \ \ n = 20 \ ; \ \bar{x} = 90$$

نعلم أن:

$$IC\left(\sigma^2\right)_{(1-\propto)\%}=\left[\frac{(n-1)\,s^2}{K^2_{1-\frac{\alpha}{2}};n\_1}\;;\frac{(n-1)\,s^2}{K^2_{\frac{\alpha}{2}};n\_1}\right]$$

أي:

$$IC\left(\sigma^2\right)_{(95)\%}=\left[\frac{19\times\ 9^2}{K^2_{0.975};19}\;;\frac{19\times\ 9^2}{K^2_{0.025};19}\right]$$

$$=[46{,}778\ ;172{,}729]$$

أي أن تباين ضغط الدم عند مستوى ثقة 95% يقع مابين 46,778 و172,729.

ملاحظة:

يمكن الحصول على مجال الثقة للانحراف المعياري بمستوى ثقة $(1-\alpha)\%$ وذلك بأخذ الجذور التربيعية الموجبة لحدود مجال الثقة للتباين، أي:

$$\mathbf{IC}(\boldsymbol{\sigma})_{(\mathbf{1}-\propto)\%}=\left[\sqrt{\frac{(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})\,\boldsymbol{s}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{K}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{1}-\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}};\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}}};\sqrt{\frac{(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})\,\boldsymbol{s}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{K}^{\mathbf{2}}_{\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}};\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}}}\right]$$

6. مجال الثقة للنسبة بين تباينين $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$:

مجال الثقة للنسبة بين تباينين تخضع للتوزيع فيشر $F(n_1-1;\ n_2-1)$ فإذا سحبت عينة حجمها n_1 وتباينها S_1^2 من مجتمع طبيعي $N(\mu_1;\ \sigma_1^2)$ وعينة أخرى حجمها n_2 وتباينها S_2^2 من مجتمع طبيعي أيضا $N(\mu_2;\ \sigma_2^2)$ مستقل عن المجتمع الأول فإن مجال الثقة للنسبة بين التباينين يعطى بالعلاقة التالية:

$$\mathbf{IC}\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}_1^2}{\boldsymbol{\sigma}_2^2}\right)_{(\mathbf{1}-\propto)\%}=\left[\frac{\boldsymbol{S}_1^2}{\boldsymbol{S}_2^2}\boldsymbol{F}_{\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}};(\boldsymbol{n}_1-\mathbf{1};\,\boldsymbol{n}_2-\mathbf{1})};\frac{\boldsymbol{S}_1^2}{\boldsymbol{S}_2^2}\boldsymbol{F}_{\mathbf{1}-\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2}};(\boldsymbol{n}_1-\mathbf{1};\,\boldsymbol{n}_2-\mathbf{1})}\right]$$

مثال:

أخذت عينة حجمها $n_1=8$ وتباينها $S_1^2=82$ من مجتمع طبيعي $N(\mu_1;\ \sigma_1^2)$ وعينة أخرى حجمها $n_2=11$ وتباينها $S_2^2=160$ من مجتمع طبيعي أيضا $N(\mu_2;\ \sigma_2^2)$ مستقل عن المجتمع الأول

أوجد مجال الثقة للنسبة بين تبايني المجتمعين عند درجة ثقة 90%

الحل:

لدينا:

$$IC\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)_{(1-\propto)\%} = \left[\frac{S_1^2}{S_2^2} F_{\frac{\alpha}{2};(n_1-1;\, n_2-1)} ; \frac{S_1^2}{S_2^2} F_{1-\frac{\alpha}{2};(n_1-1;\, n_2-1)}\right]$$

حيث:

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{82}{160}$$

$$F_{\frac{\alpha}{2};(n_1-1;\, n_2-1)} = 0{,}28$$

$$F_{1-\frac{\alpha}{2};(n_1-1;\, n_2-1)} = 3{,}14$$

ومنه:

$$IC\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)_{(1-\propto)\%} = [0{,}6972 \;\; ; \;\; 7{,}81]$$

7. خطأ المعاينة في التقدير وحجم العينة اللازم لعدم تجاوز خطأ معين:

يعتبر تحديد حجم العينة المناسب من الأمور الهامة عند الاستدلال الاحصائي لما يترتب عليه من إيجابيات كتوفير الوقت اللازم من جهة والتحكم في التكاليف من جهة أخرى، ضف إلى ذلك الحصول على النتائج الجيدة في وقت قصير بالنسبة للتقديرات الخاصة بمعالم المجتمع لذلك يجب التحكم في مقدار الخطأ المسموح به بين القيمة الحقيقية والتقدير، فكما نعلم أن تقدير أي معلمة من معالم المجتمع $(p; \sigma^2; \mu)$ بواسطة الإحصائية المقابلة لها في العينة $(f; s^2; \bar{x})$ يترتب عليه خطأ يدعى خطأ المعاينة وسببه إجراء الدراسة الإحصائية على عينة بدلا من أن تكون شاملة. ورياضيا يمثل خطأ المعاينة $\boldsymbol{E}$ القيمة المطلقة للفرق بين قيمة المقدر $\hat{\theta}$ والقيمة الحقيقية للمعلمة θ أي:

$$\boldsymbol{E} = |\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}|$$

ولتحديد حجم العينة نميز حالتين هما:

- **حالة المتوسط الحسابي للمجتمع μ:**

نعلم أنه عند مستوى ثقة $(1-\alpha)\%$ فإن مجال الثقة للمتوسط الحسابي في حالة ما كان تباين المجتمع معلوم هو[1]:

$$IC(\mu)_{(1-\propto)\%} = \left[\bar{x} - Z_{1-\frac{\propto}{2}} . \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + Z_{1-\frac{\propto}{2}} . \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

أي أن:

[1] سهير فهمي حجازي ومحمود الدريني، مرجع سبق ذكره، ص.54.

$$\bar{x} - Z_{1-\frac{\propto}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{1-\frac{\propto}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$-Z_{1-\frac{\propto}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} - \mu \leq +Z_{1-\frac{\propto}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

وبذلك يكون:

$$|\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}| \leq +\boldsymbol{Z}_{\mathbf{1}-\frac{\propto}{2}}.\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}$$

أي أن خطأ المعاينة في تقدير $\boldsymbol{\mu}$ باستخدام $\bar{\boldsymbol{x}}$ هو على الأكثر المقدار: $\boldsymbol{Z}_{\mathbf{1}-\frac{\propto}{2}}.\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}$ ونسمي هذا المقدار بالحد الأعلى لخطأ المعاينة في تقدير μ ونرمز له بـ E حيث:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{Z}_{\mathbf{1}-\frac{\propto}{2}}.\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}$$

وانطلاقا من صيغة $\boldsymbol{E}$ يمكن حساب حجم العينة $\boldsymbol{n}$ حيث نقوم بتربيع الطرفين فنجد:

$$E^2 = (Z_{1-\frac{\propto}{2}})^2.\frac{\sigma^2}{n}$$

ومنه:

$$\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{Z}_{\mathbf{1}-\frac{\propto}{2}})^2.\frac{\boldsymbol{\partial}^2}{\boldsymbol{E}^2}$$

وهو **حجم العينة** المطلوب.

وفي هذا السياق لدينا الملاحظات التالية:

ملاحظة1:

هناك علاقة عكسية بين حجم العينة $\boldsymbol{n}$ و مقدار الخطأ في التقدير $\boldsymbol{E}$ حيث كلما زاد حجم العينة كلما كان خطأ المعاينة ضعيف وكانت الدراسة الاحصائية أكثر دقة.

ملاحظة2:

يتأثر تحديد حجم العينة بعدة عوامل منها: حجم المجتمع المراد دراسته، مستوى الثقة والانحراف المعياري.

ملاحظة3:

إن تحديد حجم العينة مسبقا في المعاينة الاحصائية يترتب عليه توفير الوقت اللازم والتحكم في التكاليف والحصول على نتائج جيدة وفي وقت قصير.

مثال:

في مصنع لإنتاج السميد ومشتقاته تقوم آلة بملأ أكياس الفرينة ذات الوزن 1 كغ وبغرض معرفة فيما إذا كانت هذه الآلة تقوم بعملية الملأ بكيفية جيدة نقوم بسحب عينة عشوائية ذات حجم معين وتقدير متوسط وزن الأكياس التي تملؤها الآلة انطلاقا من هذه العينة، باقتراض أن وزن الأكياس عبارة عن متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بانحراف معياري 15 غ فما هو حجم العينة التي يجب أخذها حتى نكون واثقين بنسبة 95% أن الخطأ في تقدير متوسط وزن الأكياس لن يزيد عن 5 غ؟

الحل:

$$n = (Z_{1-\frac{\alpha}{2}})^2.\frac{\partial^2}{E^2}$$
$$n = (1{,}96)^2.\frac{15^2}{5^2}$$
$$n = 35$$

2.4. حالة نسبة المجتمع p:

عند تقدير نسبة المجتمع $\boldsymbol{p}$ بواسطة $\boldsymbol{f}$ فإن الحد الأعلى لخطأ المعاينة في تقدير $\boldsymbol{p}$ عند مستوى ثقة $(1-\alpha)\%$ هو:

$$\boldsymbol{E = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}}$$

أما حجم العينة اللازم فهو:

$$\boldsymbol{n = (Z_{1-\frac{\alpha}{2}})^2.\frac{f(1-f)}{E^2}}$$

مثال:

تعتزم السلطات تنظيم حملة لمكافحة التدخين بولاية سطيف وتريد معرفة نسبة المدخنين لذا قامت بسحب عينة من 1800 شخص فوجدت من بينهم 270 مدخن

- قدر بمجال عند مستوى المعنوية 1% نسبة المدخنين في ولاية سطيف.
- ما هو خطأ المعاينة في هذا التقدير.
- إذا أردنا تحسين دقة النتائج بنسبة 50 % فما هو حجم العينة اللازم لتحقيق هذا الهدف؟

الحل:

- مجال الثقة لنسبة المدخنين بولاية سطيف

$$IC(P)_{(1-\propto)\%} = \left[f - Z_{1-\frac{\propto}{2}}.\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} ; f + Z_{1-\frac{\propto}{2}}.\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]$$

$$IC(P)_{(1-\propto)\%} = [0,1282\ ;\ 0,1717]$$

- خطأ المعاينة في هذا التقدير

$$E = Z_{1-\frac{\propto}{2}}.\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}$$

$$E = 0,0217$$

- حجم العينة اللازم لتحسين دقة النتائج بنسبة 50 %

تحسين دقة النتائج بنسبة 50 % يعني تخفيض مقدار خطأ المعاينة بـ 50 % وبذلك يكون خطأ المعاينة هو:

$$\grave{E} = 0,011085$$

$$n = (Z_{1-\frac{\propto}{2}})^2.\frac{f(1-f)}{\grave{E}^2}$$

$$n = 7210$$

III. تمارين مقترحة للمحور الثاني:

التمرين الأول:

لمقارنة متوسط الدخل الشهري للأسر القاطنة في مدينة A بمتوسط الدخل الشهري للأسر القاطنة في مدينة B أخذت عينتين عشوائيتين حجمها على التوالي 20و 25 ووجد أن متوسط الدخل في العينة المأخوذة من مدينة A يقدر 25000دج بتباين 640000 بينما في مدينة B فتشير احصاءات العينة الى متوسط الدخل الشهري للأسر هو 21000دج بتباين يقدر ب . 360000

- ما التقدير عند مستوى ثقة 95 %الفرق بين متوسطي الدخل الشهري للأسر في المدينتين؟

التمرين الثاني:

بغرض إيجاد حل مستعجل لظاهرة رمي الخبز في المجتمع الجزائري تكفلت وزارة التجارة بدراسة الموضوع من كل جوانبه، حيث قامت في احدى الخطوات باستقصاء آراء عينة من العائلات حجمها 1700 عائلة فتبين أن عدد العائلات في العينة التي توافق على رفع سعر الخبز كحل لا مفر منه لهذه الظاهرة هو 34 عائلة.

- متى نعتبر نسبة العينة f مقدرا متماسكا؟
- قدر بمجال نسبة العائلات التي توافق على رفع سعر الخبز كحل لهذه الظاهرة في المجتمع الجزائري باحتمال خطأ 1% واشرح النتيجة.

– بفرض أن $p = 36\%$، و $n = 140$، أحسب احتمال أن لا تتجاوز نسبة العائلات التي توافق على رفع سعر الخبز في هذه العينة ثلثي نسبة هذه العائلات في المجتمع.

التمرين الثالث:

يعتبر الوقت والتكلفة من أهم محددات اختيار شركات الطيران من طرف عملاء درجات الأعمال. في دراسة لمجلة ما لعينة مؤلفة من 1993 شخص، أجابوا على الاستبيان، أشار 618 منهم إلى أن برنامج الرحلات يعتبر أهم محدد لاختيار شركة الطيران.

- ما هو التقدير النقطي لنسبة المجتمع الذين يعتبرون برنامج الرحلات كأهم محدد لاختيار شركة الطيران؟
- أوجد مجال ثقة 95%لنسبة المجتمع
- كم يجب أن يكون حجم العينة، لكي نحصل على خطأ تقدير قدره 0.01بدرجة ثقة قدرها 95؟% هل تنصح المجلة باعتمادها؟ برر إجابتك؟

التمرين الرابع:

بغرض تقدير نسبة المؤسسات الاستشفائية العمومية EPH التي تقوم برسكلة نفاياتها الطبية كما يجب في الجزائر، أجريت دراسة إحصائية على عينة حجمها 250 مؤسسة إستشفائية، تبين من خلال هذه الدراسة أن 150 مؤسسة من هذه العينة لا تقوم برسكلة نفاياتها على الإطلاق. والمطلوب:

1. قدر بمجال نسبة المؤسسات الإستشفائية التي لا تقوم برسكلة نفاياتها في الجزائر بإحتمال خطأ قدره 5 %، واشرح النتيجة.

2. إذا علمت أن نسبة المؤسسات الإستشفائية التي تقوم برسكلة نفاياتها الطبية في الجزائر هي7% وتم سحب عينة عشوائية من 150 مؤسسة إستشفائية. أحسب احتمال أن تكون نسبة المؤسسات الاستشفائية التي تقوم برسكلة نفاياتها في هذه العينة محصورة بين 4% و8%.

3. بفرض أنه تم سحب عينتين من المؤسسات الإستشفائية الأولى من الجزائر والأخرى من تونس الشقيقة بغرض المقارنة بين نسبة المؤسسات المتبنية لنظام رسكلة النفايات الطبية فتم الحصول على البيانات التالية:

n_1	n_2	p_1	p_2	f_1	f_2
140	155	15%	7.5%	6%	12%

والمطلوب: ماهو القانون الإحتمالي للفرق بين نسبتي هاتين العينتين وحدد معالمه؟

المحور الثالث:

الاختبارات الاحصـــــــائية للفروض

تمهيد:

من خلال هذا الفصل سنتطرق لبعض الفروض الإحصائية الهامة المبنية، على أساس المتوسطات الحسابية والتباين للعينات وسنجد أن هناك صلة وثيقة بين التقدير الإحصائي والاختبار الإحصائي، هذا الأخير يعتبر من الأدوات الإحصائية الواسعة الاستخدام والمهمة، وأحد المواضيع الرئيسية للاستدلال والهدف من استخدام اختبار الفروض الاحصائية هو الوصول الى قرار، بشأن قبول أو رفض فرضية محددة وفقا لمعطيات العينة المتوفرة لدى متخذ القرار، وفيما يلي بعض المفاهيم المتعلقة بهذه الاختبارات.

I. مفاهيم أساسية حول اختبارات الفروض الإحصائية

قد يتعرض الباحث في حياته العملية إلى مواقف معينة، تتطلب منه اتخاذ قرار بناء على معلومات محسوبة من عينة، فعلى سبيل المثال، قد تتوصل من خلال بحث أجريته حول الدخل الشهري للأسر في مدينة ما أن متوسط دخل الأسرة في هذه المدينة، اعتمادا على العينة التي اخترتها هو 13000دج فيما تدعي جهة أخرى أن متوسط الدخل هو 15000دج، فهل الفرق بين متوسط الدخل في العينة التي اخترتها وادعاء هذه الجهة يرجع فقط إلى مجرد الصدفة (الاختيار العشوائي للعينة)، أم أن متوسط الدخل في المدينة هو فعلا أقل من 15000دج. للوصول إلى اتخاذ قرار في مثل هذا الموضوع، نتبع أسلوب إحصائي يسمى اختبار الفرضيات والذي يعتبر من المواضيع الأساسية للتطبيقات الإحصائية، في مختلف المجالات العملية، ويهتم هذا النوع من الاختبارات باتخاذ القرارات الاحصائية المناسبة، وتعد الاجراءات المتعلقة بهده الاختبارات أداة أساسية من الأدوات التحليلية الاحصائية، حيث أن الاجراء المتبع في اختبار الفرضيات ينطوي على الخطوات التالية[1]:

- ✓ صياغة فرضية معينة؛
- ✓ اختبار الفرضية؛
- ✓ اتخاذ قرار بشأن الفرضية كنتيجة للاختبار

إن أغلب الفرضيات الاحصائية تتعلق بمعلمات المجتمع الاحصائي، أو التوزيعات الاحتمالية ومثال ذلك متوسط المجتمع وتباينه، والفروق بين المتوسطات والنسب، والعلاقات بين المتغيرات والظواهر المختلفة، كما أنها تتعلق بطبيعة هذه التوزيعات ونوعها، فكما هو الحال بالنسبة للتقدير الإحصائي فإن اختبار الفرضيات يعتمد أساسا على مبادئ نظرية المعاينة.

[1] حسن ياسين طعمة وإيمان حسين حنوش، مرجع سبق ذكره، ص.240.

1. تعريف الفرضية الإحصائية واختبارها:

تعرف الفرضية الإحصائية بأنها عبارة عن ادعاء، تصريح أو تخمين معين حول خصائص مجتمع ما مثل قيمة معلمة معينة وأحيانا حول أكثر من مجتمع مثل تساوي متوسط مجتمعين، قد يكون هذا التخمين صحيحا أو خاطئا، ولا يمكن التأكد من ذلك إلا من خلال اختباره احصائيا، وهذا الأخير يعرف بأنه اختبار صحة ومصداقية القيمة (القيم) التي تأخذها المعلمة (المعلمات) التي تم تقديرها، وعادة ما تجرى الاختبارات حول قيمة محددة، أو حول النطاق (الفترة) التي وقعت ضمنها أو خارجها،[1] ويعرف اختبار الفرضية أيضا بأنه أسلوب احصائي هدفه وضع قاعدة قرار نتمكن على ضوئها من الاختيار بين فرضيتين احصائيتين اعتمادا على بيانات العينة التي يتم اختيارها من المجتمع الاحصائي والقرار الذي يتم التوصل إليه بشأن الفرضية يكون إما القبول أو الرفض باحتمالات معينة، وهذا يعني أن الأسلوب الذي يعتمد على العينة يترك مجالا لاحتمال الوقوع بالخطأ في اتخاذ القرارات.

2. صياغة الفرضيات الإحصائية:

يجب أن تكون الفرضيات متكاملة بحيث تشمل كل النتائج الممكنة، (تشمل كل الحوادث) ويجب أن تكون تبادلية بحيث تلغي احداهما الأخرى، وبناء عليه يمكن القول أن لكل مسألة فرضيتان هما الفرضية المبدئية والفرضية البديلة، وإذا أدى الاختبار إلى رفض الفرضية المبدئية فإننا نعتبر أن الفرضية البديلة صحيحة والعكس صحيح.

تصاغ عادة الفرضية الاحصائية في صورة عدم وجود فروق ذات دلالة إحصائية، أو عدم وجود أثر ذو دلالة إحصائية، أو عدم وجود علاقة ذات دلالة إحصائية، حيث يطلق على هذه الفرضية مصطلح فرضية العدم، الفرضية المبدئية أو الفرضية الصفرية ويرمز لها بـ H_0. وهي الفرضية التي نتمسك بها ولا نرفضها إلا في حالة توفر دلائل قوية من واقع العينة تستدعي رفضها. وعمليا فإن فرضية العدم هذه هي التي تكون موضع الاختبار حيث نفرض أنها صحيحة ونحاول تأكيد أو رفض هذا الأمر وهذا بناء على دلائل العينة. ومن جهة أخرى هناك مكمل لفرضية العدم يُصطلح عليه بالفرضية البديلة يرمز لها بالرمز H_A أو H_1.[2]

في المثال التمهيدي لدينا:

$$\begin{cases} H_0: \mu \geq 15000 \\ H_1: \mu < 15000 \end{cases}$$

[1] عبد الرزاق بني هاني، "الاقتصاد القياسي: المبادئ الرياضية والاحصائية، "الطبعة الأولى، دار وائل للنشر، الأردن، 2014، ص 3.

[2] شبيجل وآخرون. الاحتمالات والإحصاء: ملخصات شوم إيزي. الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر، د ت ن، ص.96.

3. الخطأ من النوع الأول والخطأ من النوع الثاني:

ان عملية اتخاذ أي قرار إحصائي ينطوي على أخطاء بنسب معينة، حيث أنه من المحتمل أن نرفض فرضية معينة في حين أنها صحيحة، والعكس صحيح ، وعموما يمكن القول أنه هناك نوعان من الأخطاء الإحصائية، بحيث إذا أدت قاعدة القرار الموضوعة إلى رفض الفرضية المبدئية اعتمادا على نتائج العينة رغم أنها في الحقيقة صحيحة نقول أننا ارتكبنا خطأ من النوع الأول، في حين إذا أدت إلى قبول الفرضية المبدئية رغم أنها في الحقيقة خاطئة نقول أننا ارتكبنا خطأ من النوع الثاني، ويمكن أن نقلل من الخطأين بتكبير حجم العينة[1]، والجدول رقم (2) يوضح الفرق بين الخطأ من النوع الأول والخطأ من التوع الثاني:

جدول رقم(1):الخطأ من النوع الأول والخطأ من النوع الثاني

القرار	الفرضية H_0 صحيحة	الفرضية H_0 خاطئة
قبول الفرضية H_0	صواب	خطأ من النوع الثاني
رفض الفرضية H_0	خطأ من النوع الأول	صواب

المصدر: سهير فهمي حجازي ومحمود الدريني. **الإحصاء التطبيقي**. الشركة المصرية لإعادة التأمين، مصر، 2004، ص. 79-80.

4. مستوى المعنوية:

نسمي الاحتمال الذي نكون مستعدين وفقه بالمجازفة بارتكاب خطأ من النوع الأول بمستوى المعنوية أو مستوى الدلالة، ونرمز له بالرمز α، أي: $\alpha = P\left(H_0\text{رفض}/H_0\text{صحيحة}\right)$ ويحدد هذا الاحتمال قبل البدء في إجراء الاختبار أي قبل إجراء عملية المعاينة حتى لا تؤثر النتائج التي نحصل عليها في قرارنا. وفي العادة نستخدم في الحياة العملية مستويات معنوية 0,05 أو 0,01 وهذا لا يمنع من استخدام مستويات أخرى للمعنوية.[2]

[1] François Cottet-Emard .probabilités et tests d'hypothèse : cours et exercices corrigés, 1er édition, Belgique ,2014, P.340-341.

[2] د.شبيجل وآخرون، مرجع سبق ذكره، ص.98.

5. إحصائية الاختبار:

هي الإحصائية التي نبني على أساسها قاعدة اتخاذ القرار والتي تستخدم في الغالب لتقدير معلمة المجتمع ويجب أن يكون توزيعها الاحتمالي معلوما (توزيع المعاينة) حتى نتمكن من الاعتماد عليه في بناء الاختبار.

6. منطقة القبول ومنطقة الرفض:

تقسم كل القيم التي يمكن أن تأخذها إحصائية الاختبار إلى مجموعتين غير متداخلتين إحداهما تشمل القيم التي إن ظهرت ترفض فرضية العدم وتسمى منطقة الرفض أو المنطقة الحرجة والأخرى تشمل القيم التي إن ظهرت لا ترفض فرضية العدم وتسمى منطقة عدم الرفض أو منطقة القبول

7. اختبار ذو جانبين أو الاختبار ثنائي الاتجاه:

في هذا النوع من الاختبار تأخذ الفرضـية المبدئية قيمة واحدة، على عكس الفرضـية البديلة التي تأخذ جميع القيم التي تختلف على هذه القيمة سـواء بالزيادة أو بالنقصـان، فعلى سـبيل المثال إذا كان اختبارنا يتعلق بمتوسط المجتمع μ فإنّنا نقول أنّ الاختبار ذو جانبين إذا كان اهتمامنا منصبا على تغيرات μ في كلا الاتجاهين (<، >) من قيمة معينة μ_0 ونصيغ المسألة على النحو التالي:

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

8. اختبار الطرف الأيسر:

إذا كان اهتمامنا منصـبا على تغيرات μ مثلا في اتجاه واحد من قيمة معينة μ_0 وكان اهتمامنا بالتغير من الجهة اليسرى فإنّ المسألة تكون على النحو التالي:

$$\begin{cases} H_0: \mu \geq \mu_0 \\ H_1: \mu < \mu_0 \end{cases}$$

9. اختبار الطرف الأيمن:

إذا كان اهتمامنا منصبا على تغيرات μ مثلا في اتجاه واحد من قيمة معينة μ_0 وكان اهتمامنا بالتغير من الجهة اليمنى فإنّ المسألة تكون على النحو التالي:

$$\begin{cases} H_0: \mu \leq \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{cases}$$

II. اختبارات مقارنة معلمة مجتمع بعدد ثابت

للقيام باختبار أي فرضية إحصائية نتبع الخطوات التالية:

- صياغة الفرضية الصفرية H_0 والفرضية البديلة H_1؛
- تثبيت مستوى المعنوية α؛
- تحديد شروط الاختبار المتوفرة (المجتمع محدود أو لا، توزيع الاحتمالي معروف أم لا، السحب بإرجاع أو بدون ارجاع، العينة كبيرة الحجم أم صغيرة، تباين المجتمع معلوم أم لا...؛
- تحديد إحصائية الاختبار المناسبة وذلك اعتمادا على الشروط المتوفرة؛
- صياغة قاعدة القرار التي تؤدي إلى رفض أو قبول فرضية العدم عند مستوى المعنوية المختار α ويتم ذلك بتحديد القيم أو القيمة الحرجة حسب طبيعة الاختبار (اختبار ذو طرفين، أو اختبار ذو جانب أيسر أو ذو جانب أيمن)
- حساب القيمة العددية لإحصائية الاختبار وإخضاعها لقاعدة القرار؛
- اتخاذ قرار قبول أو رفض فرضية العدم.

1. اختبارات الفروض الخاصة بالمتوسط الحسابي للمجتمع:

1.1. اختبار الطرفين أو ذو جانبين:

نفرض أننا نريد اختبار الفرضية التي مفادها أن قيمة متوسط المجتمع هي قيمة معينة μ_0 أي:

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

1.1.1. إذا كان حجم العينة كبير $n \geq 30$:

لنفرض أنه تم سحب عينة حجمها $n \geq 30$ من مجتمع يتوزع بمتوسط μ ونريد اختبار الفرضية السابقة، فإننا

نعلم مما سبق أن أفضل مقدر لمتوسط المجتمع هو متوسط العينة $\overline{x}$ ونعلم أنّ:

$$\boldsymbol{Z} = \frac{\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu_0}}{\sqrt{\boldsymbol{v}(\overline{\boldsymbol{x}})}} \rightarrow \boldsymbol{N}(\boldsymbol{0.1})$$

عند مستوى دلالة α فإن قرار رفض أو عدم رفض الفرضية المبدئية H_0 يكون وفقا لقاعدة اتخاذ القرار التالية:

$$\begin{cases} \mathbf{Z} = \dfrac{\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu_0}}{\sqrt{\boldsymbol{v}(\overline{\boldsymbol{x}})}} \in \left[-\boldsymbol{Z}_{\mathbf{1}-\frac{\propto}{\mathbf{2}}}.\,;+\boldsymbol{Z}_{\mathbf{1}-\frac{\propto}{\mathbf{2}}}\right] \to \overline{\mathbf{RH_0}} \\ \mathbf{Z} = \dfrac{\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu_0}}{\sqrt{\boldsymbol{v}(\overline{\boldsymbol{x}})}} \notin \left[-\boldsymbol{Z}_{\mathbf{1}-\frac{\propto}{\mathbf{2}}}.\,;+\boldsymbol{Z}_{\mathbf{1}-\frac{\propto}{\mathbf{2}}}\right] \to \boldsymbol{R}\mathbf{H_0} \end{cases}$$

حيث:

- إذا كان السحب مع الارجاع أو بدون إرجاع من مجتمع غير محدود:
  - إذا كان تباين المجتمع معلوم فإن:

$$\sqrt{v(\bar{x})} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

  - إذا كان تباين المجتمع مجهول فإن:

$$\sqrt{v(\bar{x})} = \sqrt{\frac{S^2}{n}}$$

- إذا كان السحب بدون إرجاع من مجتمع محدود:
  - إذا كان تباين المجتمع معلوم فإن:

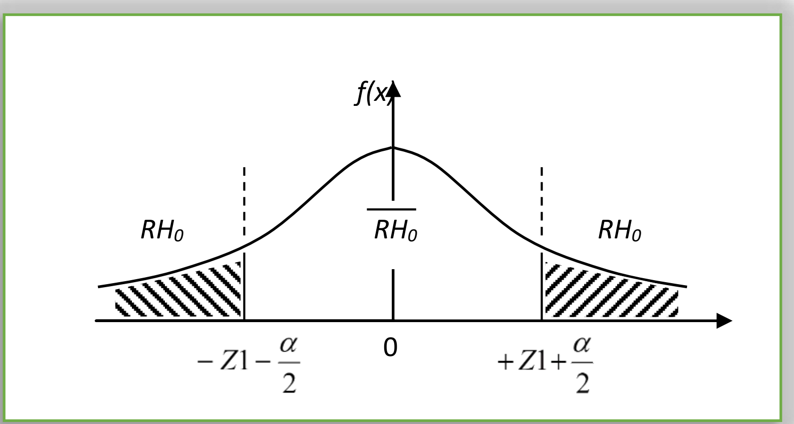
$$\sqrt{v(\bar{x})} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \times \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

  - إذا كان تباين المجتمع مجهول فإن:

$$\sqrt{v(\bar{x})} = \sqrt{\frac{S^2}{n}} \times \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

وبناء عليه فإن قرار رفض أو عدم رفض الفرضية المبدئية في حالة الاختبار ذو جانبين يكون كما هو موضح في الشكل الموالي:

شكل رقم (6): اختبار ذو جانبين



المصدر: من إعداد الباحثة

حيث تمثل $\overline{RH_0}$ منطقة **عدم الرفض** لـ H_0 في حين تمثل RH_0 منطقة الرفض لـ H_0.

مثال:

الفترة المعيشية لجهاز كهربائي هي 1750 ساعة مع انحراف معياري قدره 120 ساعة، وقد تم الحصول على هذه النتائج عن طريق عينة عشوائية حجمها 101 جهاز

المطلوب:

إذا كان μ يمثل الفترة الوسطية المعيشية للأجهزة المنتجة في المؤسسة اختبر الفرضية التالية عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$

$$\begin{cases} H_0: \mu = 1600 \\ H_1: \mu \neq 1600 \end{cases}$$

الحل:

لدينا مجتمع غير محدود و $n = 100$، ونعلم أنه في حالة عينة كبيرة فإن قاعدة اتخاذ القرار تكون على النحو التالي:

$$\begin{cases} Z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{v(\bar{x})}} \in \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \rightarrow \overline{RH_0} \\ Z = \dfrac{x - \mu_0}{\sqrt{v(\bar{x})}} \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \rightarrow RH_0 \end{cases}$$

ولدينا أيضا:

$$\mu_0 = 1600 \quad ; \quad \bar{x} = 1750$$

من جدول التوزيع الطبيعي نجد:

$$Z_{1-\frac{\propto}{2}} = Z_{0.975} = 1.96$$

ومن جهة أخرى وبالتطبيق العددي للمعطيات نجد:

$$\sqrt{v(\bar{x})} = \frac{\mathrm{s}}{\sqrt{\mathrm{n}}} = \frac{120}{\sqrt{100}} = 12$$

و:

$$\mathrm{Z} = \frac{1750 - 1600}{12} = 12.5$$

و:

$$\left[-Z_{1-\frac{\propto}{2}}.\,; +Z_{1-\frac{\propto}{2}}\right] = [-1.96; 1.96]$$

وبذلك يكون:

$$12.5 \notin [-1.96; 1.96]$$

أي أن:

$$\mathrm{Z} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{v(\bar{x})}} \notin \left[-Z_{1-\frac{\propto}{2}}.\,; +Z_{1-\frac{\propto}{2}}\right] \rightarrow R\mathrm{H}_0$$

هذا يعني أن القرار هو رفض الفرضية المبدئية H_0 عند مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$، أي أننا لا نقبل أن الفترة الوسطية المعيشية للأجهزة الكهربائية هي 1600 سا.

2.1.1. إذا كان حجم العينة صغير $n < 30$:

نعلم أنه إذا كان لدينا مجتمع يتبع توزيع طبيعي بمتوسط μ وتباين σ^2 وسحبنا منه عينات عشوائية حجم كل منها n وكانت n صغيرة $(n < 30)$ فإن الوسط الحسابي لهذه العينات يتبع أيضا التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره $E(\bar{x})$ وتباين قدره $V(\bar{x})$ ومنه:

- إذا كان السحب مع الإرجاع أو السحب بدون إرجاع من مجتمع غير محدود فإن قاعدة اتخاذ القرار تكون على النحو التالي:

$$\begin{cases} \mathbf{Z} = \dfrac{\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu_0}}{\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}} \in \left[-\boldsymbol{Z}_{\mathbf{1}-\frac{\propto}{\mathbf{2}}}.\,; +\boldsymbol{Z}_{\mathbf{1}-\frac{\propto}{\mathbf{2}}}\right] \rightarrow \overline{\mathbf{RH_0}} \\ \mathbf{Z} = \dfrac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu_0}}{\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}} \notin \left[-\boldsymbol{Z}_{\mathbf{1}-\frac{\propto}{\mathbf{2}}}.\,; +\boldsymbol{Z}_{\mathbf{1}-\frac{\propto}{\mathbf{2}}}\right] \rightarrow \boldsymbol{R}\mathbf{H_0} \end{cases}$$

- إذا كان السحب بدون إرجاع من مجتمع محدود و $\frac{n}{N} > 0,05$ فإن قاعدة اتخاذ القرار تكون على النحو التالي:

$$\begin{cases} Z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}} \in \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\,;\, +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \rightarrow \overline{RH_0} \\ Z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}} \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\,;\, +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \rightarrow RH_0 \end{cases}$$

أما إذا سحبنا عينة عشوائية حجمها $n < 30$ من مجتمع غير محدود يتوزع توزيع طبيعي بمتوسط μ وتباين σ^2 مجهولين. وفي هذه الحالة نعلم مما سبق أنّ:

$$T = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \rightarrow t_{n-1}$$

عند مستوى دلالة α فإن قرار رفض أو عدم رفض الفرضية المبدئية H_0 تحت هذه الشروط يكون وفقا لقاعدة اتخاذ القرار التالية:

$$\begin{cases} T = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{s^2}{n}}} \in \left[-t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}};\, +t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\right] \rightarrow \overline{RH_0} \\ T = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{s^2}{n}}} \notin \left[-t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}};\, +t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\right] \rightarrow RH_0 \end{cases}$$

مثال:

قمنا بسحب عينة حجمها $n = 17$ من مجتمع غير محدود يتوزع توزيع طبيعي بمتوسط وتباين مجهولين

فوجدنا أن: $\bar{x} = 11, \quad S = 2$.

عند مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$ اختبر صحة الفرضية التالية:

$$\begin{cases} H_0: \mu = 10 \\ H_1: \mu \neq 10 \end{cases}$$

الحل:

لدينا مجتمع غير محدود بالإضافة إلى:

$$\bar{x} = 11 \quad , \quad S = 2 \quad , \quad n = 16 \quad , \quad \alpha = 5\%$$

ونعلم أنه في حالة عينة صغيرة فإن قاعدة اتخاذ القرار تكون كما يلي:

$$\begin{cases} T = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{s^2}{n}}} \in \left[-t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}; +t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\right] \rightarrow \overline{\mathrm{RH}_0} \\ T = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{s^2}{n}}} \notin \left[-t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}; +t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\right] \rightarrow R\mathrm{H}_0 \end{cases}$$

من جدول توزيع ستيودنت نجد :

$$t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} = t_{15;0.975} = 2.13$$

ومن جهة أخرى فإن:

$$\frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{16}} = 0.5$$

وبذلك يكون:

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{s^2}{n}}} = \frac{11 - 10}{0.5} = 2$$

ومنه:

$$\left[-t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}; t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\right] = [-2.13; +2.13]$$

وبما أن $2 \in [-2.13; +2.13]$ فإننا لا نرفض H_0، أي أن القرار هو $\overline{\mathrm{RH}_0}$ وبذلك نعتبر أن متوسط المجتمع يساوي فعلا 10.

2.1. اختبار ذو طرف أيسر:

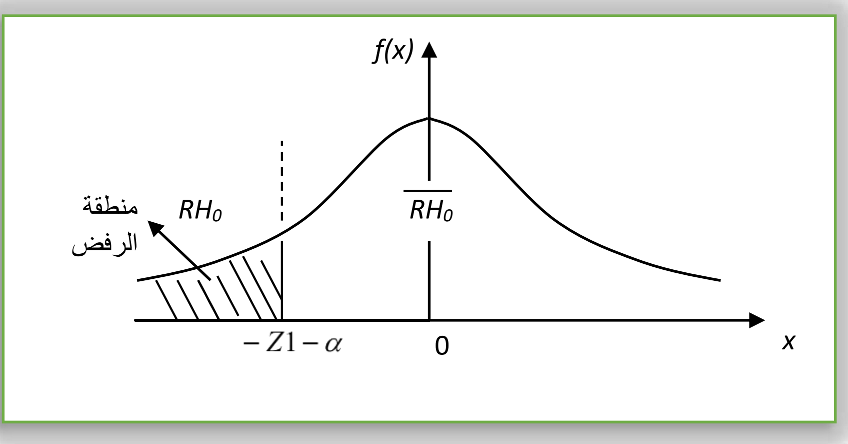
1.2.1 إذا كان حجم العينة كبير $n \geq 30$:

لنفرض أنه تم سحب عينة حجمها $n \geq 30$ من مجتمع يتوزع بمتوسط μ ونريد اختبار الفرضية التالية:

$$\begin{cases} H_0: \mu \geq \mu_0 \\ H_1: \mu < \mu_0 \end{cases}$$

إذا كان الاختبار ذو طرف أيسر فإن منطقتي الرفض والقبول تكونان كما هو موضح في الشكل الموالي:

شكل رقم (7): منطقتي القبول والرفض في الاختبار ذو الطرف الأيسر



المصدر: من إعداد الباحثة

عند مستوى دلالة α فإن قرار رفض أو عدم رفض الفرضية المبدئية H_0 يكون وفقا لقاعدة اتخاذ القرار التالية:

$$\begin{cases} \mathbf{Z} = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{v(\bar{x})}} \geq -Z_{1-\alpha} \rightarrow \overline{RH_0} \\ \mathbf{Z} = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{v(\bar{x})}} < -Z_{1-\alpha} \rightarrow RH_0 \end{cases}$$

حيث:

- إذا كان السحب مع الارجاع أو بدون إرجاع من مجتمع غير محدود:
  - إذا كان تباين المجتمع معلوم فإن:

$$\sqrt{v(\bar{x})} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

  - إذا كان تباين المجتمع مجهول فإن:

$$\sqrt{v(\bar{x})} = \sqrt{\frac{S^2}{n}}$$

- إذا كان السحب بدون إرجاع من مجتمع محدود:
  - إذا كان تباين المجتمع معلوم فإن:

$$\sqrt{v(\bar{x})} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \times \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

- إذا كان تباين المجتمع مجهول فإن:

$$\sqrt{v(\bar{x})} = \sqrt{\frac{S^2}{n}} \times \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

مثال:

الفترة المعيشية الوسطية لجهاز كهربائي هي 1570 ساعة مع انحراف معياري قدره 120 ساعة. إذا علمنا أن هذه النتائج تم الوصول إليها من خلال دراسة لعينة تحتوي على 100 منتوج. والمطلوب اختبر صحة الفرضية التالية عند مستوى دلالة $\alpha = 5\%$

$$H_0: \mu \geq 1600$$
$$H_1: \mu < 1600$$

الحل:

بما أن:

$n = 100$; $\bar{x} = 1570$; $s = 120$; $\alpha = 0{,}05$

فإن قاعدة اتخاذ القرار تكون كما يلي:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} \geq -Z_{1-\alpha} \rightarrow \overline{RH_0}$$
$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} < -Z_{1-\alpha} \rightarrow R\mathrm{H}_0$$

لدينا:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} = \frac{1570 - 1600}{\sqrt{\frac{120^2}{100}}} = -2{,}5$$

$$-Z_{1-\alpha} = -1{,}645$$

بما أن:

$$-2{,}5 < -1{,}645 \rightarrow R\mathrm{H}_0$$

حسب النتائج المحصل عليها واعتمادا على قاعدة القرار أعلاه ن رفض الفرضية الصفرية H_0 أي أن الفترة المعيشية الوسطية للجهاز الكهربائي أقل من 1600 ساعة.

2.2.1 إذا كان حجم العينة صغير $n < 30$:

إذا سحبنا عينات عشوائية حجم كل منها n وكانت n صغيرة $(n < 30)$ من مجتمع يتبع توزيع طبيعي بمتوسط μ وتباين σ^2 فإن الوسط الحسابي لهذه العينات يتبع أيضا التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره $E(\bar{x})$ وتباين قدره $V(\bar{x})$ ومنه:

- إذا كان السحب مع الإرجاع أو السحب بدون إرجاع من مجتمع غير محدود فإن قاعدة اتخاذ القرار تكون على النحو التالي:

$$\begin{cases} Z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq -Z_{1-\alpha} \rightarrow \overline{RH_0} \\ Z = \dfrac{x - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} < -Z_{1-\alpha} \rightarrow RH_0 \end{cases}$$

- إذا كان السحب بدون إرجاع من مجتمع محدود و $\frac{n}{N} > 0,05$ فإن قاعدة اتخاذ القرار تكون على النحو التالي:

$$\begin{cases} Z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}} \geq -Z_{1-\alpha} \rightarrow \overline{RH_0} \\ Z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}} < -Z_{1-\alpha} \rightarrow RH_0 \end{cases}$$

أما إذا سحبنا عينة عشوائية حجمها $n < 30$ من مجتمع غير محدود يتوزع توزيع طبيعي بمتوسط μ وتباين σ^2 مجهولين، فعند مستوى دلالة α فإن قرار رفض أو عدم رفض الفرضية المبدئية H_0 تحت هذه الشروط يكون وفقا لقاعدة اتخاذ القرار التالية:

$$\begin{cases} T = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{s^2}{n}}} \geq -t_{n-1;1-\propto} \rightarrow \overline{RH_0} \\ T = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{s^2}{n}}} < -t_{n-1;1-\propto} \rightarrow RH_0 \end{cases}$$

مثال:

تحقق من صحة الفرضية التالية:

$$H_0: \mu \geq 11$$
$$H_1: \mu < 11$$

بالنسبة لعينة تحتوي على البيانات التالية: 12، 8، 10، 13، 8، 11، 9، 12، 7، 10، علما أن $\alpha = 5\%$

الحل:

بما أن σ مجهول نقوم بحساب تباين العينة s^2 وذلك اعتمادا على الجدول الموالي:

x_i	n_i	$x_i n_i$	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$n_i(x_i - \bar{x})^2$
7	1	7	−3	9	9
8	2	16	−2	4	8
9	1	9	−1	1	1
10	2	20	0	0	0
11	1	11	1	1	1
12	2	24	2	4	8
13	1	13	3	9	9
	10	100	0		36

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i n_i}{\sum n_i} = \frac{100}{10} = 10$$

$$s^2 = \frac{\sum n_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1} = \frac{36}{9} = 4 \Rightarrow s = 2$$

بما أن: $n < 30$ وتباين المجتمع مجهول فإن قاعدة اتخاذ القرار ستكون كما يلي:

$$\begin{cases} T = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{s^2}{n}}} \geq -t_{n-1;1-\propto} \rightarrow \overline{\mathrm{RH}_0} \\ T = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{s^2}{n}}} < -t_{n-1;1-\propto} \rightarrow R\mathrm{H}_0 \end{cases}$$

لدينا:

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \frac{11 - 10}{\sqrt{\frac{4}{10}}} = 1{,}58$$

$$-t_{n-1;1-\propto} = -1{,}833$$

بما أن $1{,}58 > -1{,}833$ واعتمادا على قاعدة القرار فإن القرار يكون بعدم رفض H_0 عند مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$ أي $\overline{\mathrm{RH}_0}$

3.1.اختبار ذو طرف أيمن:

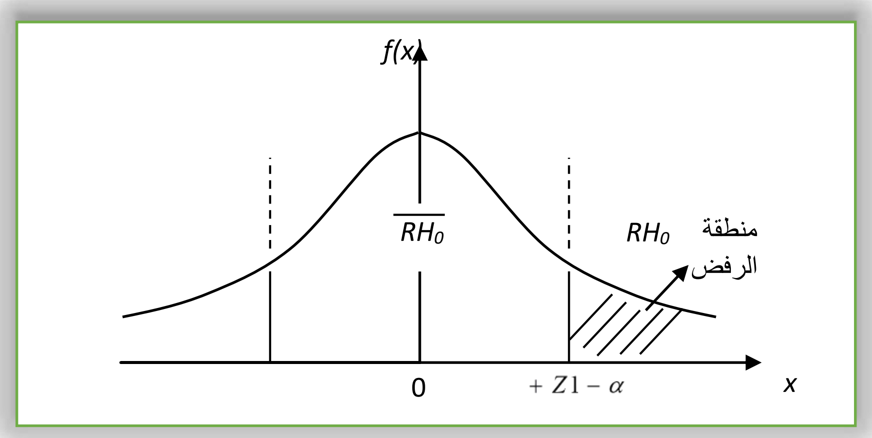
1.3.1. إذا كان حجم العينة كبير $n \geq 30$:

لنفرض أنه تم سحب عينة حجمها $n \geq 30$ من مجتمع يتوزع بمتوسط μ ونريد اختبار الفرضية:

$$\begin{cases} H_0: \mu \leq \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{cases}$$

إذا كان الاختبار ذو طرف أيمن فإن منطقتي الرفض والقبول تكونان كما هو موضح في الشكل الموالي:

شكل رقم (8): منطقتي القبول والرفض في الاختبار ذو الطرف الأيمن



المصدر: من إعداد الباحثة

عند مستوى دلالة α فإن قرار رفض أو عدم رفض الفرضية المبدئية $\mathrm{H_0}$ يكون وفقا لقاعدة اتخاذ القرار التالية:

$$\begin{cases} \boldsymbol{Z} = \dfrac{\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu_0}}{\sqrt{\boldsymbol{v}(\bar{\boldsymbol{x}})}} \leq +\boldsymbol{Z_{1-\alpha}} \rightarrow \overline{\mathbf{RH_0}} \\ \mathbf{Z} = \dfrac{\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu_0}}{\sqrt{\boldsymbol{v}(\bar{\boldsymbol{x}})}} > +\boldsymbol{Z_{1-\alpha}} \rightarrow \boldsymbol{R}\mathbf{H_0} \end{cases}$$

حيث:

- إذا كان السحب مع الارجاع أو بدون إرجاع من مجتمع غير محدود:
  - إذا كان تباين المجتمع معلوم فإن:

$$\sqrt{v(\bar{x})} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

  - إذا كان تباين المجتمع مجهول فإن:

$$\sqrt{v(\bar{x})} = \sqrt{\frac{S^2}{n}}$$

- إذا كان السحب بدون إرجاع من مجتمع محدود:
  - إذا كان تباين المجتمع معلوم فإن:

$$\sqrt{v(\bar{x})} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \times \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

  - إذا كان تباين المجتمع مجهول فإن:

$$\sqrt{v(\bar{x})} = \sqrt{\frac{S^2}{n}} \times \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

2.3.1. إذا كان حجم العينة صغير $n < 30$:

إذا سحبنا عينات عشوائية حجم كل منها n وكانت n صغيرة $(n < 30)$ من مجتمع يتبع توزيع طبيعي بمتوسط μ وتباين σ^2 فإن الوسط الحسابي لهذه العينات يتبع أيضا التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره $E(\bar{x})$ وتباين قدره $V(\bar{x})$ ومنه:

- إذا كان السحب مع الإرجاع أو السحب بدون إرجاع من مجتمع غير محدود فإن قاعدة اتخاذ القرار تكون على النحو التالي:

$$\begin{cases} Z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq Z_{1-\alpha} \rightarrow \overline{RH_0} \\ Z = \dfrac{x - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > Z_{1-\alpha} \rightarrow RH_0 \end{cases}$$

- إذا كان السحب بدون إرجاع من مجتمع محدود فإن قاعدة اتخاذ القرار تكون على النحو التالي:

$$\begin{cases} Z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}} \leq Z_{1-\alpha} \rightarrow \overline{RH_0} \\ Z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}} > Z_{1-\alpha} \rightarrow RH_0 \end{cases}$$

أما إذا سحبنا عينة عشوائية حجمها $n < 30$ من مجتمع غير محدود يتوزع توزيع طبيعي بمتوسط μ وتباين σ^2 مجهولين، فعند مستوى دلالة α فإن قرار رفض أو عدم رفض الفرضية المبدئية H_0 تحت هذه الشروط يكون وفقا لقاعدة اتخاذ القرار التالية:

إذا كانت $n < 30$ فإن قاعدة اتخاذ القرار تكون كما يلي:

$$\begin{cases} T = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \leq +t_{n-1;1-\alpha} \rightarrow \overline{\mathrm{RH}_0} \\ T = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} > +t_{n-1;1-\alpha} \rightarrow RH_0 \end{cases}$$

مثال:

في دراسة حول أسباب هجرة الأطباء بالجزائر اجريت دراسة استطلاعية لآراء عينة من الأطباء بكل من القطاع الخاص والعمومي حول الموضوع حجمها 900 طبيب فوجد أن متوسط عدد الأطباء الذين يرجعون أسباب الهجرة إلى ظروف العمل الصعبة في هذه العينة هو 400 طبيب علما أن متغير الدراسة هنا يتبع التوزيع الطبيعي بإنحراف معياري قدره 50.

هل متوسط عدد الأطباء الذين يرجعون أسباب الهجرة إلى ظروف العمل الصعبة يفوق 500 طبيب عند مستوى دلالة 1%.

الحل:

هل متوسط عدد الأطباء الذين يرجعون أسباب الهجرة إلى ظروف العمل الصعبة يفوق 500 طبيب عند مستوى دلالة 1% ؟ أي أنه هنا يُراد اختبار الفرضية التالية:

$$\begin{cases} H_0: \mu \leq 500 \\ H_1: \mu > 500 \end{cases}$$

نلاحظ أن الاختبار هنا ذو جانب أيمن و $n \leq 30$ ومنه فإن قاعدة اتخاذ القرار تكون على النحو التالي:

$$\begin{cases} Z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{v(\bar{x})}} \leq +Z_{1-\propto} \rightarrow \overline{\mathrm{RH}_0} \\ Z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{v(\bar{x})}} > +Z_{1-\propto} \rightarrow R\mathrm{H}_0 \end{cases}$$

لدينا:

$$\bar{x} = 400 \quad ; \quad \sigma = 50 \quad ; \quad \mu_0 = 500 \quad ; \quad n = 900$$

$$\sqrt{v(\bar{x})} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{50}{\sqrt{900}} = \frac{50}{30} = 1{,}6667$$

$$Z_{1-\propto} = Z_{1-0{,}01} = Z_{0{,}99} = 2{,}3263$$

$$Z = \frac{400 - 500}{1{,}6667} = -59{,}9988$$

نلاحظ أن:

$$Z = -59{,}9988 \leq Z_{1-\propto} = 2{,}3263 \rightarrow \overline{\mathrm{RH}_0}$$

أي أن القرار هو عدم رفض H_0 بمعنى أن متوسط عدد الأطباء الذين يرجعون أسباب الهجرة إلى ظروف العمل الصعبة لا يفوق 500 طبيب.

2. اختبارات الفروض الخاصة بنسبة المجتمع:

بما أن المنهجية المتبعة في الاختبار السابق الخاص بالمتوسط الحسابي تبقى صالحة في جميع الاختبارات الأخرى، كل ما يتغير هو إحصائية الاختبار المناسبة وتوزيعها الاحتمالي لذا سنعرض اختبارات الفروض الخاصة بنسبة المجتمع بشكل مختصر

- شروط التطبيق: عينة كبيرة الحجم؛

- مستوى المعنوية: α
- إحصائية الاختبار المناسبة:

$$Z = \frac{f - p_0}{\sqrt{v(f)}} \rightarrow N(0,1)$$

حيث:

- إذا كان السحب مع الإرجاع أو السحب بدون إرجاع من مجتمع غير محدود

$$v(f) = \frac{p_0(1 - p_0)}{n}$$

- إذا كان السحب بدون إرجاع من مجتمع محدود فإن:

$$v(f) = \frac{p_0(1 - p_0)}{n} \times \frac{N - n}{N - 1}$$

1.2 اختبار ذو طرفين:

إذا كان الاختبار ذو طرفين كما في الفرضية التالية:

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p \neq p_0 \end{cases}$$

فعند مستوى دلالة α يكون قرار رفض أو عدم رفض الفرضية المبدئية H_0 وفقا لقاعدة اتخاذ القرار التالية:

$$\begin{cases} \mathbf{Z} = \dfrac{\boldsymbol{f - p_0}}{\sqrt{\boldsymbol{v(f)}}} \in \left[-\boldsymbol{Z}_{\mathbf{1}-\frac{\alpha}{2}}.;+\boldsymbol{Z}_{\mathbf{1}-\frac{\alpha}{2}}\right] \rightarrow \overline{\mathbf{RH_0}} \\ \mathbf{Z} = \dfrac{\boldsymbol{f - p_0}}{\sqrt{\boldsymbol{v(f)}}} \notin \left[-\boldsymbol{Z}_{\mathbf{1}-\frac{\alpha}{2}}.;+\boldsymbol{Z}_{\mathbf{1}-\frac{\alpha}{2}}\right] \rightarrow \boldsymbol{R}\mathbf{H_0} \end{cases}$$

2.2 اختبار ذو طرف أيسر:

إذا كان الاختبار ذو طرف أيسر كما في الفرضيات التالية:

$$\begin{cases} H_0 : P \geq P_0 \\ H_1 : P < P_0 \end{cases}$$

فعند مستوى دلالة معين $\propto$ يُبنى القرار حسب قاعدة اتخاذ القرار التالية:

$$\begin{cases} \mathbf{Z} = \dfrac{\boldsymbol{f} - \boldsymbol{p_0}}{\sqrt{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{f})}} \geq -\boldsymbol{Z_{1-\propto}} \rightarrow \overline{\mathbf{RH_0}} \\ \mathbf{Z} = \dfrac{\boldsymbol{f} - \boldsymbol{p_0}}{\sqrt{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{f})}} < -\boldsymbol{Z_{1-\propto}} \rightarrow \boldsymbol{R}\mathbf{H_0} \end{cases}$$

3.2 اختبار ذو طرف أيمن:

إذا كان الاختبار ذو طرف أيمن كما في الفرضيات التالية:

$$\begin{cases} H_0: P \leq P_0 \\ H_1: P > P_0 \end{cases}$$

فعند مستوى دلالة معين $\propto$ يُبنى القرار حسب قاعدة اتخاذ القرار التالية:

$$\begin{cases} \mathbf{Z} = \dfrac{\boldsymbol{f} - \boldsymbol{p_0}}{\sqrt{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{f})}} \leq +\boldsymbol{Z_{1-\propto}} \rightarrow \overline{\mathbf{RH_0}} \\ \mathbf{Z} = \dfrac{\boldsymbol{f} - \boldsymbol{p_0}}{\sqrt{\boldsymbol{v}(\mathbf{f})}} > +\boldsymbol{Z_{1-\propto}} \rightarrow \boldsymbol{R}\mathbf{H_0} \end{cases}$$

مثال:

تدعي إحدى المؤسسات أن نسبة إنتاجها المعيب لا تتجاوز 5%، وبغرض التأكد من صحة الادعاء تم أخذ عينة من 80 وحدة من انتاج المؤسسة فوجد أن 6 منتجات منها معيبة.

عند مستوى دلالة 1% اختبر صحة ادعاء هذه المؤسسة.

الحل:

نريد اختبار الفرضية التالية:

$$\begin{cases} H_0: p \leq 5\% \\ H_1: p > 5\% \end{cases}$$

نلاحظ أن الاختبار هنا ذو جانب أيمن و $n \geq 30$ ومنه فإن قاعدة إتخاذ القرار تكون على النحو التالي:

$$\begin{cases} Z = \dfrac{f - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} \leq +Z_{1-\propto} \rightarrow \overline{\mathrm{RH_0}} \\ Z = \dfrac{f - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} > +Z_{1-\propto} \rightarrow R\mathrm{H_0} \end{cases}$$

لدينا:

$$f = \frac{6}{80} = 75\% \qquad ; \qquad p_0 = 5\% \quad ; \quad n = 80$$

$$Z_{1-\propto} = Z_{1-0,01} = Z_{0,99} = 2,3263$$

$$Z = \frac{0.075 - 0.05}{\sqrt{\frac{0,05(1-0,05)}{80}}} = 1,026$$

نلاحظ أن:

$$Z = 1,026 \leq Z_{1-\propto} = 2,3263 \rightarrow \overline{R\mathrm{H}_0}$$

أي أن القرار هو عدم رفض الفرضية المبدئية H_0 بمعنى أن ادعاء هذه المؤسسة صحيح والذي مفاده أن نسبة الإنتاج المعيب لا تتجاوز 5%.

3. اختبارات الفروض الخاصة بتباين المجتمع

تماما مثل اختبارات الفروض للنسبة سنكتفي بعرض اختبارات الفروض الخاصة بتباين المجتمع بشكل مختصر :

- شروط التطبيق: عينة عشوائية حجمها n مسحوبة من مجتمع طبيعي؛
- مستوى المعنوية: α
- إحصائية الاختبار المناسبة:

$$\frac{n.s^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)\hat{s}^2}{\sigma^2} \rightarrow K^2_{n-1}$$

1.3 اختبار ذو جانبين:

إذا كان الاختبار ذو طرفين كما في الفرضية التالية:

$$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$$

فعند مستوى دلالة α يكون قرار رفض أو عدم رفض الفرضية المبدئية H_0 وفقا لقاعدة اتخاذ القرار التالية:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\frac{(n-1).s^2}{\sigma^2} \in \left[\mathrm{K}^2_{\frac{\alpha}{2}}; \mathrm{n\_1}.; \mathrm{K}^2_{1-\frac{\alpha}{2}}; \mathrm{n\_1}\right] \rightarrow \overline{\mathrm{RH}_0}} \\ \boldsymbol{\frac{(n-1).s^2}{\sigma^2} \notin \left[\mathrm{K}^2_{\frac{\alpha}{2};\mathrm{n\_1}}.; \mathrm{K}^2_{1-\frac{\alpha}{2};\mathrm{n\_1}}\right] \rightarrow R\mathrm{H}_0} \end{cases}$$

2.2 اختبار ذو طرف أيسر:

إذا كان الاختبار ذو طرف أيسر كما في الفرضية التالية:

$$\begin{cases} H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases}$$

فعند مستوى دلالة معين ∝ يُبنى القرار حسب قاعدة اتخاذ القرار التالية:

$$\begin{cases} \dfrac{(\boldsymbol{n}-\mathbf{1}).\boldsymbol{s}^{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{2}}} \geq \mathbf{K}^{\mathbf{2}}_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{n\_1}} \rightarrow \overline{\mathbf{RH_0}} \\ \dfrac{(\boldsymbol{n}-\mathbf{1}).\boldsymbol{s}^{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{2}}} < \mathbf{K}^{\mathbf{2}}_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{n\_1}} \rightarrow \boldsymbol{R}\mathbf{H_0} \end{cases}$$

3.2 اختبار ذو طرف أيمن:

إذا كان الاختبار ذو طرف أيمن كما في الفرضية التالية:

$$\begin{matrix} H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{matrix}$$

فعند مستوى دلالة معين α يُبنى القرار حسب قاعدة اتخاذ القرار التالية:

$$\begin{cases} \dfrac{(\boldsymbol{n}-\mathbf{1}).\boldsymbol{s}^{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{2}}} \leq \mathbf{K}^{\mathbf{2}}_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{n\_1}} \rightarrow \overline{\mathbf{RH_0}} \\ \dfrac{(\boldsymbol{n}-\mathbf{1}).\boldsymbol{s}^{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{2}}} > \mathbf{K}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha};\mathbf{n\_1}} \rightarrow \boldsymbol{R}\mathbf{H_0} \end{cases}$$

مثال:

تقوم آلة بإنتاج دعائم معدنية ذات أطوال مختلفة بحيث يمكن ضبط الطول المطلوب بتعديل طفيف للآلة إلا أن هناك دوما فروق في حدود معينة ولضمان تجانس نسبي للدعائم المنتجة فإن معايير الإنتاج تشترط أن لا يزيد تباين أطوالها عن 0,36 ملم.

بفرض أن أطوال الدعائم تتبع التوزيع الطبيعي سحبنا عشوائيا عينة من 20 دعامة فوجدنا أن تباين أطوالها هو 0,42 ملم، فهل يمكن قبول فرضية أن الدعائم متجانسة عند مستوى المعنوية 5%.

الحل:

لدينا:

$H_0: \sigma^2 \leq 0{,}36$
$H_1: \sigma^2 > 0{,}36$

ومنه:

$$\begin{cases} \dfrac{(n-1).s^2}{\sigma^2} \leq \mathrm{K}^2_{\alpha;\mathrm{n\_1}} \rightarrow \overline{\mathrm{RH_0}} \\ \dfrac{(n-1).s^2}{\sigma^2} > \mathrm{K}^2_{1-\alpha\,;\mathrm{n\_1}} \rightarrow R\mathrm{H_0} \end{cases}$$

ولدينا:

$$\frac{(n-1).s^2}{\sigma^2} = \frac{19 \times 0{,}42}{0{,}36} = 22{,}167$$

$$\mathrm{K}^2_{\alpha;\mathrm{n\_1}} = \mathrm{K}^2_{0{,}95;19} = 30{,}1$$

بما أن:

$$\frac{(n-1).s^2}{\sigma^2} = 22{,}167 < \mathrm{K}^2_{1-\alpha\,;\mathrm{n\_1}} = 30{,}1$$

فإن القرار يكون بعدم رفض $\mathrm{H_0}$ $(\overline{\mathrm{RH_0}})$ أي أن تشتت أطوال الدعائم يظهر في حدود معايير الإنتاج وبالتالي نعتبرها متجانسة

III. اختبارات مقارنة معلمة مجتمع ما بمعلمة مجتمع آخر:

1. اختبارات الفروض للفرق بين وسطي مجتمعين مستقلين:

يتم صياغة الفرضيات في هذا الاختبار بإحدى العبارات التالية:

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 \leq \mu_2 \\ H_1: \mu_1 > \mu_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0: \mu_1 \geq \mu_2 \\ H_1: \mu_1 < \mu_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

سندرس هذه الاختبارات من خلال حالتين:

1.1 حالة المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي والتباين معلوم

إذا كان العينتان كبيرتان أو إذا كانت صغيرتان[1] من مجتمع (أو مجتمعان) يتبع التوزيع الطبيعي بتباين معلوم، فإننا نستخدم التوزيع الطبيعي لاختبار الفرضيات حول الفروق أو المجاميع بين المتوسطين، بحيث يحسب إحصاء الاختبار بالعلاقة التالية:

$$\mathrm{Z} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \rightarrow N(0,1)$$

وبالتالي فعند مستوى دلالة معين α يُبنى القرار حسب قاعدة اتخاذ القرار التالية:

- إذا كان الاختبار ذو جانبين:

$$\mathbf{Z} = \frac{(\bar{\boldsymbol{x}}_1 - \bar{\boldsymbol{x}}_2) - (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)}{\sqrt{\frac{\boldsymbol{\sigma}_1^2}{\mathbf{n}_1} + \frac{\boldsymbol{\sigma}_2^2}{\mathbf{n}_2}}} \in \left[-\boldsymbol{Z}_{1-\frac{\propto}{2}}.\,;+\boldsymbol{Z}_{1-\frac{\propto}{2}}\right] \rightarrow \overline{\mathbf{RH_0}}$$

$$\mathbf{Z} = \frac{(\bar{\boldsymbol{x}}_1 - \bar{\boldsymbol{x}}_2) - (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)}{\sqrt{\frac{\boldsymbol{\sigma}_1^2}{\mathbf{n}_1} + \frac{\boldsymbol{\sigma}_2^2}{\mathbf{n}_2}}} \notin \left[-\boldsymbol{Z}_{1-\frac{\propto}{2}}.\,;+\boldsymbol{Z}_{1-\frac{\propto}{2}}\right] \rightarrow \boldsymbol{R}\mathbf{H_0}$$

- إذا كان الاختبار ذو جانب أيسر :

$$\begin{cases} \mathbf{Z} = \frac{(\bar{\boldsymbol{x}}_1 - \bar{\boldsymbol{x}}_2) - (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)}{\sqrt{\frac{\boldsymbol{\sigma}_1^2}{\mathbf{n}_1} + \frac{\boldsymbol{\sigma}_2^2}{\mathbf{n}_2}}} \geq -\boldsymbol{Z}_{1-\propto} \rightarrow \overline{\boldsymbol{RH_0}} \\ \mathbf{Z} = \frac{(\bar{\boldsymbol{x}}_1 - \bar{\boldsymbol{x}}_2) - (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)}{\sqrt{\frac{\boldsymbol{\sigma}_1^2}{\mathbf{n}_1} + \frac{\boldsymbol{\sigma}_2^2}{\mathbf{n}_2}}} < -\boldsymbol{Z}_{1-\propto} \rightarrow \boldsymbol{R}\mathbf{H_0} \end{cases}$$

- إذا كان الاختبار ذو جانب أيمن:

[1] المقصود بالعينات الكبيرة هنا هو أن تكون حجم العينتين مع أكبر من 30 أي $\boldsymbol{30} \leq \boldsymbol{n_1}$, $\boldsymbol{30} \leq \boldsymbol{n_2}$ بينما العينات الصغيرة هي التي يكون حجم العينتين مع أقل من 30 أي $n_1 < 30$, $n_2 < 30$ أو حجم عينة واحدة على الأقل أقل من 30 أي $n_1 < 30$,أو $n_2 < 30$

$$\begin{cases} \mathbf{Z} = \dfrac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \geq Z_{1-\propto} \to \overline{RH_0} \\ \mathbf{Z} = \dfrac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} < Z_{1-\propto} \to R\mathrm{H}_0 \end{cases}$$

2.1 حالة المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي والتباين مجهول:

إذا كان حجم العينتين صغير والتباين مجهول فإن:

$$\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}} = t_{n_1+n_2-2}$$

وبالتالي فعند مستوى دلالة معين α يُبنى القرار حسب قاعدة اتخاذ القرار التالية:

- إذا كان الاختبار ذو جانبين:

$$\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}} \in \left[-t_{n_1+n_2-2\ 1-\frac{\propto}{2}}\,;+t_{n_1+n_2-2\ 1-\frac{\propto}{2}}\right] \to \overline{\mathrm{RH_0}}$$

$$\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}} \notin \left[-t_{n_1+n_2-2\ 1-\frac{\propto}{2}}\,;+t_{n_1+n_2-2\ 1-\frac{\propto}{2}}\right] \to R\mathrm{H}_0$$

- إذا كان الاختبار ذو جانب أيسر:

$$\begin{cases} \dfrac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}} \geq -t_{n_1+n_2-2\ 1-\propto} \to \overline{RH_0} \\ \dfrac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}} < -t_{n_1+n_2-2\ 1-\propto} \to R\mathrm{H}_0 \end{cases}$$

- إذا كان الاختبار ذو جانب أيمن:

$$\begin{cases} \dfrac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}} \geq t_{n_1+n_2-2\ 1-\propto} \rightarrow \overline{RH_0} \\ \dfrac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}} < t_{n_1+n_2-2\ 1-\propto} \rightarrow RH_0 \end{cases}$$

مثال:

يريد مقاول أن يحدد عند مستوى معنوية قدره 5% ما إذا كان الأجر بالساعة للعمال متساوي في مدينتين لذلك أخذ عينة عشوائية من الأجر بالساعة في كلتا المدينتين وتحصل على المعلومات التالية:

$$n_2 = 54 \quad \bar{x}_2 = 450 \qquad \sigma_2 = 180 \qquad n_1 = 40 \quad \bar{x}_1 = 600 \qquad \sigma_1 = 200$$

الحل:

لدينا الفرضية التالية:

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

ولأن $n_1 \geq 30$, $n_2 \geq 30$ وتباين المجتمعين معلوم فإن قاعدة اتخاذ القرار تكون كما يلي:

$$Z = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \in \left[-Z_{1-\frac{\propto}{2}}.;+Z_{1-\frac{\propto}{2}}\right] \rightarrow \overline{RH_0}$$

$$Z = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \notin \left[-Z_{1-\frac{\propto}{2}}.;+Z_{1-\frac{\propto}{2}}\right] \rightarrow RH_0$$

لدينا:

$$Z = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} = 1{,}5$$

$$\left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.;+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]=[-1{,}96\,;+1{,}96]$$

بما أن: $1{,}5 \in [-1{,}96\,;+1{,}96]$ فإن القرار يكون بعدم رفض الفرضية المبدئية أي $\overline{\mathrm{RH_0}}$ ومنه فالأجر الساعي في الدينتين متساوي.

2. اختبارات الفروض للفرق بين نسبتين:

لاختبار فرضية فروق بين نسبتين مجتمعين كبيرين، فإن صياغة هذه الفرضية تكون بإحدى الصيغ الثلاث التالية:

$$\begin{cases}H_0: P_1 \le P_2\\ H_1: P_1 > P_2\end{cases}\qquad \begin{cases}H_0: P_1 \ge P_2\\ H_1: P_1 < P_2\end{cases}\qquad \begin{cases}H_0: P_1 = P_2\\ H_1: P_1 \ne P_2\end{cases}$$

ولدينا إحصائية الاختبار معرفة بالعلاقة التالية:

$$\mathrm{Z}=\frac{(f_1-f_2)-(P_1-P_2)}{\sqrt{\frac{f_1(1-f_1)}{n_1}+\frac{f_2(1-f_2)}{n_2}}}\rightarrow N(0,1)$$

وبالتالي فعند مستوى دلالة معين α يُبنى القرار حسب قاعدة اتخاذ القرار التالية:

- إذا كان الاختبار ذو جانبين:

$$\begin{cases}\mathbf{Z}=\dfrac{(\boldsymbol{f_1}-\boldsymbol{f_2})-(\boldsymbol{P_1}-\boldsymbol{P_2})}{\sqrt{\dfrac{\boldsymbol{f_1}(\mathbf{1}-\boldsymbol{f_1})}{\boldsymbol{n_1}}+\dfrac{\boldsymbol{f_2}(\mathbf{1}-\boldsymbol{f_2})}{\boldsymbol{n_2}}}}\in\left[-\boldsymbol{Z}_{\mathbf{1}-\frac{\alpha}{\mathbf{2}}}.;+\boldsymbol{Z}_{\mathbf{1}-\frac{\alpha}{\mathbf{2}}}\right]\rightarrow\overline{\mathbf{RH_0}}\\ \mathbf{Z}=\dfrac{(\boldsymbol{f_1}-\boldsymbol{f_2})-(\boldsymbol{P_1}-\boldsymbol{P_2})}{\sqrt{\dfrac{\boldsymbol{f_1}(\mathbf{1}-\boldsymbol{f_1})}{\boldsymbol{n_1}}+\dfrac{\boldsymbol{f_2}(\mathbf{1}-\boldsymbol{f_2})}{\boldsymbol{n_2}}}}\notin\left[-\boldsymbol{Z}_{\mathbf{1}-\frac{\alpha}{\mathbf{2}}}.;+\boldsymbol{Z}_{\mathbf{1}-\frac{\alpha}{\mathbf{2}}}\right]\rightarrow\boldsymbol{R}\mathbf{H_0}\end{cases}$$

- إذا كان الاختبار ذو جانب أيسر:

$$\begin{cases}\mathbf{Z}=\dfrac{(\boldsymbol{f_1}-\boldsymbol{f_2})-(\boldsymbol{P_1}-\boldsymbol{P_2})}{\sqrt{\dfrac{\boldsymbol{f_1}(\mathbf{1}-\boldsymbol{f_1})}{\boldsymbol{n_1}}+\dfrac{\boldsymbol{f_2}(\mathbf{1}-\boldsymbol{f_2})}{\boldsymbol{n_2}}}}\ge-\boldsymbol{Z}_{\mathbf{1}-\alpha}\rightarrow\overline{\boldsymbol{RH_0}}\\ \mathbf{Z}=\dfrac{(\boldsymbol{f_1}-\boldsymbol{f_2})-(\boldsymbol{P_1}-\boldsymbol{P_2})}{\sqrt{\dfrac{\boldsymbol{f_1}(\mathbf{1}-\boldsymbol{f_1})}{\boldsymbol{n_1}}+\dfrac{\boldsymbol{f_2}(\mathbf{1}-\boldsymbol{f_2})}{\boldsymbol{n_2}}}}<-\boldsymbol{Z}_{\mathbf{1}-\alpha}\rightarrow\boldsymbol{R}\mathbf{H_0}\end{cases}$$

- إذا كان الاختبار ذو جانب أيمن:

$$\begin{cases} \mathbf{Z} = \dfrac{(\boldsymbol{f_1} - \boldsymbol{f_2}) - (\boldsymbol{P_1} - \boldsymbol{P_2})}{\sqrt{\dfrac{\boldsymbol{f_1}(\mathbf{1} - \boldsymbol{f_1})}{\boldsymbol{n_1}} + \dfrac{\boldsymbol{f_2}(\mathbf{1} - \boldsymbol{f_2})}{\boldsymbol{n_2}}}} \geq \boldsymbol{Z_{1-\propto}} \rightarrow \overline{\boldsymbol{RH_0}} \\ \mathbf{Z} = \dfrac{(\boldsymbol{f_1} - \boldsymbol{f_2}) - (\boldsymbol{P_1} - \boldsymbol{P_2})}{\sqrt{\dfrac{\boldsymbol{f_1}(\mathbf{1} - \boldsymbol{f_1})}{\boldsymbol{n_1}} + \dfrac{\boldsymbol{f_2}(\mathbf{1} - \boldsymbol{f_2})}{\boldsymbol{n_2}}}} < \boldsymbol{Z_{1-\propto}} \rightarrow \boldsymbol{R}\mathbf{H_0} \end{cases}$$

مثال:

لدينا عينتين من العمال من منطقتين وعدد العاطلين بينهم وكالاتي:

$\mathrm{n}_1 = 1600 \quad a_1 = 600$ $\qquad$ $\mathrm{n}_2 = 1400 \quad a_2 = 84$

والمطلوب اختبار ان كانت نسبة العاطلين في كلا المنطقتين مختلفة عند مستوى معنوية 5%.

الحل:

لدينا الفرضية التالية:

$$\begin{cases} H_0 : P_1 = P_2 \\ H_1 : P_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

عند مستوى دلالة α يُبنى القرار حسب قاعدة اتخاذ القرار التالية:

$$\begin{cases} \mathrm{Z} = \dfrac{(f_1 - f_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\dfrac{f_1(1 - f_1)}{n_1} + \dfrac{f_2(1 - f_2)}{n_2}}} \in \left[-Z_{1-\frac{\propto}{2}}. ; +Z_{1-\frac{\propto}{2}}\right] \rightarrow \overline{\mathrm{RH}_0} \\ \mathrm{Z} = \dfrac{(f_1 - f_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\dfrac{f_1(1 - f_1)}{n_1} + \dfrac{f_2(1 - f_2)}{n_2}}} \notin \left[-Z_{1-\frac{\propto}{2}}. ; +Z_{1-\frac{\propto}{2}}\right] \rightarrow R\mathrm{H}_0 \end{cases}$$

ولدينا:

$$f_1 = \frac{600}{1600} = 0{,}375$$

$$f_2 = \frac{84}{1400} = 0{,}06$$

$$Z = \frac{(f_1 - f_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{f_1(1-f_1)}{n_1} + \frac{f_2(1-f_2)}{n_2}}} = 1.63$$

ولدينا:

$$\left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.;+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = [-1,96\,;+1,96]$$

بما أن: $1,63 \in [-1,96\,;+1,96]$ فإن القرار يكون بعدم رفض الفرضية المبدئية أي $\overline{\mathrm{RH_0}}$ ومنه فلا يوجد فرق بين نسبتي العاطلين عن العمل في كلا المنطقتين.

3. اختبارات الفروض حول النسبة بين تبايني مجتمعين:

يتعلق هذا الاختبار بتساوي تبايني مجتمعين مستقلين σ_1^2 و σ_2^2 ولتكن n_1 و n_2 عينتين عشوائيتين مسحوبتين من مجتمعين مستقلين موزعان توزيعا طبيعيا، ولتكن S_1^2 تباين العينة الأولى و S_2^2 تباين العينة الثانية، لاختبار فرضية فروق بين نسبتين مجتمعين كبيرين، فإن صياغة هذه الفرضية تكون بإحدى الصيغ الثلاث التالية:

$$\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 \le \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0: \sigma_1^2 \ge \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 \ne \sigma_2^2 \end{cases}$$

ولدينا إحصائية الاختبار معرفة بالعلاقة التالية:

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \to F(n_1 - 1;\ n_2 - 1)$$

وبالتالي فعند مستوى دلالة معين α يُبنى القرار حسب قاعدة اتخاذ القرار التالية:

- إذا كان الاختبار ذو جانبين:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}} \in \left[\boldsymbol{F_{n_1-1;n_2-1;\frac{\alpha}{2}}.\,;F_{n_1-1;n_2-1\,;1-\frac{\alpha}{2}}}\right] \to \overline{\mathbf{RH_0}} \\ \boldsymbol{\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}} \notin \left[\boldsymbol{F_{n_1-1;n_2-1;\frac{\alpha}{2}}.\,;F_{n_1-1;n_2-1\,;1-\frac{\alpha}{2}}}\right] \to \boldsymbol{R}\mathbf{H_0} \end{cases}$$

- إذا كان الاختبار ذو جانب أيسر :

$$\begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{S_1^2/\sigma_1^2}}{\boldsymbol{S_2^2/\sigma_2^2}} \geq -\boldsymbol{F_{n_1-1;n_2-1\,;\,1-\alpha}} \rightarrow \overline{\boldsymbol{RH_0}} \\ \dfrac{\boldsymbol{S_1^2/\sigma_1^2}}{\boldsymbol{S_2^2/\sigma_2^2}} < -\boldsymbol{F_{n_1-1;n_2-1\,;\,1-\alpha}} \rightarrow \boldsymbol{R\mathrm{H}_0} \end{cases}$$

- إذا كان الاختبار ذو جانب أيمن:

$$\begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{S_1^2/\sigma_1^2}}{\boldsymbol{S_2^2/\sigma_2^2}} \geq -\boldsymbol{F_{n_1-1;n_2-1\,;\,\alpha}} \rightarrow \overline{\boldsymbol{RH_0}} \\ \dfrac{\boldsymbol{S_1^2/\sigma_1^2}}{\boldsymbol{S_2^2/\sigma_2^2}} < -\boldsymbol{F_{n_1-1;n_2-1\,;\,\alpha}} \rightarrow \boldsymbol{R\mathrm{H}_0} \end{cases}$$

مثال:

اذا افترضنا ان تبايني المجتمعين متساويان ولكنهما غير معلومين، و تباين العينيتين $S_1^2 = 16$ $S_2^2 = 25$ عند مستوى معنوية 10 % مع n2=10، n1=12 اختبر الفرضية التالية:

$$\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$$

الحل:

بما أن الاختبار ذو جانبين فعند مستوى دلالة α (10 %) يُبنى القرار حسب قاعدة اتخاذ القرار التالية:

$$\begin{cases} \dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \in \left[F_{n_1-1;n_2-1;\frac{\alpha}{2}}.\,; F_{n_1-1;n_2-1\,;\,1-\frac{\alpha}{2}}\right] \rightarrow \overline{\mathrm{RH}_0} \\ \dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \notin \left[F_{n_1-1;n_2-1;\frac{\alpha}{2}}.\,; F_{n_1-1;n_2-1\,;\,1-\frac{\alpha}{2}}\right] \rightarrow R\mathrm{H}_0 \end{cases}$$

ولأن: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

فإن:

$$\begin{cases} \dfrac{S_1^2}{S_2^2} \in \left[F_{n_1-1;n_2-1;\frac{\alpha}{2}}.\,; F_{n_1-1;n_2-1\,;\,1-\frac{\alpha}{2}}\right] \rightarrow \overline{\mathrm{RH}_0} \\ \dfrac{S_1^2}{S_2^2} \notin \left[F_{n_1-1;n_2-1;\frac{\alpha}{2}}.\,; F_{n_1-1;n_2-1\,;\,1-\frac{\alpha}{2}}\right] \rightarrow R\mathrm{H}_0 \end{cases}$$

لدينا:

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} = 0,64$$

$$F_{n_1-1;n_2-1;\frac{\propto}{2}} = 0,34$$

$$F_{n_1-1;n_2-1\,;1-\frac{\propto}{2}} = 3,11$$

بما أن $0,64 \in [0,34;3,11]$ فإن القرار يكون بعدم رفض الفرضية المبدئية أي $\overline{\mathrm{RH}_0}$ وهذا يعني تجانس المجتمعين.

IV. تمارين مقترحة للمحور الثالث:

<u>التمرين الأول:</u>

تدعي ادارة أحد المصانع لصناعة نوع معين من الأنابيب المعدنية بأن الوسط الحسابي لطول قطر الأنابيب المصنعة في هذا المصنع مطابق للمواصفات ويساوي 2 سم. وللتأكد من صحة قوله سحبت عينة عشوائية من الانتاج الكلي تحتوي على 35 أنبوب معدني فكانت أطوال أقطارها كما يلي:

2,1	1,89	1,94	1,97	1,99	1,95	1,85	1,84	1,9	2
1,9	2,02	2,04	2,05	1,9	1,95	1,96	1,97	2	2,11
1,9	1,9	1,89	2,12	2,09	2,07	2,06	1,98	1,94	1,93
					2,03	1,98	1,92	2,1	2,08

حيث:

$$\sum_{i=1}^{35}(xi-\bar{x})^2 = 2.7335$$

إذا علمت أن أطوال أقطار الأنابيب تتوزع طبيعيا.

- اختبر صحة ادعاء ادارة هذا المصنع عند مستوى معنوية 0,05.

<u>التمرين الثاني:</u>

يدعي مدير مصنع لإنتاج الدقيق أن متوسط أوزان أكياسه هو 25 كلغ أو أكثر ولكن توجد شكاوى من الزبائن مفادها أن متوسط أوزان الأكياس أقل من 25 كلغ. لاختبار هذه الشكوى سحبت عينة من 25 كيس من الانتاج

ووجد أن متوسط أوزانها 24,75 كلغ وتباينها هو 0,49 كلغ. فإذا كان وزن كيس الدقيق هو متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي.

- اختبر صحة شكوى الزبائن عند مستوى المعنوية α=0,1.

<u>التمرين الثالث:</u>

أظهرت سجلات مديرية الأمن العام لولاية سطيف أن نسبة مستعملي حزام الأمان في السيارات (قبل تشريع إلزام الاستعمال) هي 55%. وبعد صدور تشريع الالزام، اختيرت عينة عشوائية حجمها 100 سائقٍ، فوجد أن 72 منهم يستعملون الحزام.

- اختبر عند مستوى معنوية 5% ثم 1% فيما إذا كان صدور التشريع قد زاد نسبة المستعملين لحزام الأمان. ماذا تستنتج؟

<u>التمرين الرابع:</u>

أخذت عينتين عشوائيتين من مجموعة متشابهة من الأطفال وأعطي **لأ**طفال العينة الأولى غداء A وأعطي أطفال العينة الثانية غذاء B وكانت الزيادة في أوزان الأطفال بالكيلوغرام في العينتين بعد مدة معينة كالآتي:

العينة الأولى	3,5	4,5	5,5	1,5	2,5	
العينة الثانية	1	2,5	1,5	0,5	1,5	2

- اختبر فرضية عدم وجود فرق بين أثر الغذاءين A وB في متوسط زيادة وزن الأطفال عند مستوى المعنوية 5% بفرض أن تبايني المجتمعين المسحوب منهما العينتان مجهولتين ومتساويين.

المـــلاحــــــــق

الملحق رقم (1): جدول التــــوزيـــــع الطبيعي المعياري1

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5476	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.8366	0.6406	0.5443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6735	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	07422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	07734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8506	0.8531	0.8554	0.8577	0.8598	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	08962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9043	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9866	0.9871	0.9875	0.9876	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9915
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9978	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

z	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.8	4.0	4.5
F(z)	0.99865	0.999032	0.999513	0.999517	0.999563	0.999767	0.999941	0.999926	0.999968	0.999997

ملحق رقم (2): جدول التـــوزيــــــع الطبيعي المعياري2

p	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010	
0.00	-	3.0902	2.8782	2.7478	2.6521	2.5758	2.5121	2.4573	2.4089	2.3656	2.3263	0.99
0.01	2.3263	2.2904	2.2571	2.2262	2.1973	2.1701	2.1444	2.1201	2.0969	2.0749	2.0537	0.98
0.02	2.0537	2.0335	2.0141	1.9954	1.9774	1.9600	1.9431	1.9266	1.9110	1.8957	1.8808	0.97
0.03	1.8808	1.8663	1.8522	1.8364	1.8250	1.6119	1.7991	1.7868	1.7744	1.7624	1.7507	0.96
0.04	1.7507	1.7392	1.7279	1.7169	1.7060	1.6954	1.6849	1.6747	1.6646	1.6546	1.6449	0.95
0.05	1.6449	1.6352	1.6258	1.6164	1.6072	1.5982	1.5893	1.5805	1.5716	1.5632	1.5548	0.94
0.06	1.5548	1.5464	1.5382	1.5301	1.5220	1.5141	1.5063	1.4985	1.4908	1.4833	1.4758	0.93
0.07	1.4758	1.4684	1.4611	1.4538	1.4466	1.4396	1.4325	1.4265	1.4187	1.4118	1.4051	0.92
0.08	1.4051	1.3984	1.3917	1.3852	1.3787	1.3722	1.3658	1.3585	1.3532	1.3469	1.3408	0.91
0.09	1.3408	1.3346	1.3285	1.3225	1.3165	1.3108	1.3047	1.2988	1.2930	1.2873	1.2816	0.90
0.10	1.2816	1.2759	1.2702	1.2646	1.2591	1.2536	1.2481	1.2426	1.2372	1.2319	1.2265	0.89
0.11	1.2265	1.2212	1.2160	1.2107	1.2055	1.2004	1.1952	1.1901	1.1850	1.1880	1.1750	0.88
0.12	1.1750	1.1700	1.1650	1.1601	1.1552	1.1503	1.1455	1.1407	1.1359	1.1311	1.1264	0.87
0.13	1.1264	1.1217	1.1170	1.1123	1.1077	1.1031	1.0985	1.0939	1.0893	1.0848	1.0803	0.86
0.14	1.0803	1.0758	1.0714	1.0669	1.0625	1.0581	1.0537	1.0454	1.0450	1.0407	1.0364	0.85
0.15	1.0364	1.0322	1.0279	1.0237	1.0194	1.0152	1.0110	1.0069	1.0027	0.9986	0.9945	0.84
0.16	0.9945	0.9904	0.9863	0.9822	0.9782	0.9741	0.9701	0.9661	0.9621	0.9581	0.9542	0.83
0.17	0.9542	0.9502	0.9463	0.9424	0.9385	0.9346	0.9307	0.9269	0.9230	0.9192	0.9154	0.82
0.18	0.9154	0.9116	0.9078	0.9040	0.9002	0.8965	0.8927	0.8890	0.8853	0.8816	0.8779	0.81
0.19	0.8779	0.8742	0.8705	0.8669	0.8633	0.8596	0.8560	0.8524	0.8488	0.8452	0.8416	0.80
0.20	0.8416	0.8381	0.8345	0.8310	0.8274	0.8239	0.8204	0.8169	0.8134	0.8099	0.8064	0.79
0.21	0.8064	0.8030	0.7995	0.7961	0.7926	0.7892	0.7868	0.7824	0.7790	0.7756	0.7722	0.78
0.22	0.7722	0.7688	0.7655	0.7621	0.7588	0.7554	0.7521	0.7488	0.7454	0.7421	0.7388	0.77
0.23	0.7388	0.7366	0.7323	0.7290	0.7257	0.7226	0.7192	0.7160	0.7128	0.7095	0.7063	0.76
0.24	0.7063	0.7031	0.6999	0.6967	0.6935	0.6903	0.6871	0.6840	0.6808	0.6776	0.6745	0.75
0.25	0.6745	0.6713	0.6682	0.6651	0.6620	0.6588	0.6567	0.6528	0.6495	0.6464	0.6433	0.74
0.26	0.6433	0.6403	0.6372	0.6341	0.6311	0.6280	0.6250	0.6219	0.6189	0.6158	0.6128	0.73
0.27	0.6128	0.6098	0.6068	0.6038	0.6008	0.5978	0.5948	0.5918	0.5888	0.5858	0.5828	0.72
0.28	0.5828	0.5799	0.5769	0.5740	0.5710	0.5681	0.5651	0.5622	0.5592	0.5563	0.5534	0.71
0.29	0.5534	0.5505	0.5476	0.5446	0.5417	0.5388	0.5369	0.5330	0.5302	0.5273	0.5244	0.70
0.30	0.5244	0.5215	0.5187	0.5158	0.5129	0.5101	0.5072	0.5044	0.5016	0.4987	0.4956	0.69
0.31	0.4959	0.4930	0.4902	0.4874	0.4845	0.4817	0.4789	0.4761	0.4733	0.4705	0.4677	0.68
0.32	0.4677	0.4649	0.4621	0.4593	0.4565	0.4536	0.4510	0.4482	0.4454	0.4427	0.4399	0.67
0.33	0.4399	0.4372	0.4344	0.4316	0.4289	0.4261	0.4234	0.4207	0.4179	0.4152	0.4125	0.66
0.34	0.4125	0.4097	0.4070	0.4043	0.4016	0.3989	0.3961	0.3834	0.3907	0.3880	0.3853	0.65
0.35	0.3853	0.3826	0.3799	0.3772	0.3745	0.3719	0.3692	0.3665	0.3638	0.3611	0.3585	0.64
0.36	0.3585	0.3558	0.3531	0.3505	0.3478	0.3451	0.3425	0.3398	0.3372	0.3345	0.3319	0.63
0.37	0.3319	0.3292	0.3266	0.3239	0.3213	0.3186	0.3160	0.3134	0.3107	0.3081	0.3055	0.62
0.38	0.3055	0.3029	0.3002	0.2979	0.2950	0.2924	0.2898	0.2871	0.2845	0.2819	0.2793	0.61
0.39	0.2793	0.2767	0.2741	0.2715	0.2689	0.2663	0.2637	0.2611	0.2585	0.2559	0.2533	0.60
0.40	0.2533	0.2508	0.2482	0.2466	0.2430	0.2404	0.2378	0.2353	0.2327	0.2301	0.2275	0.59
0.41	0.2275	0.2250	0.2224	0.2198	0.2173	0.2147	0.2121	0.2095	0.2070	0.2045	0.2019	0.58
0.42	0.2019	0.1993	0.1968	0.1942	0.1917	0.1891	0.1866	0.1840	0.1815	0.1789	0.1764	0.57
0.43	0.1764	0.1738	0.1713	0.1687	0.1662	0.1637	0.1611	0.1588	0.1560	0.1535	0.1510	0.56
0.44	0.1510	0.1464	0.1459	0.1434	0.1408	0.1383	0.1358	0.1332	0.1307	0.1282	0.1257	0.55
0.45	0.1257	0.1231	0.1206	0.1181	0.1166	0.1130	0.1105	0.1080	0.1055	0.1030	0.1004	0.54
0.46	0.1004	0.0979	0.0954	0.0929	0.0904	0.0878	0.0853	0.0828	0.0803	0.0778	0.0753	0.53
0.47	0.0753	0.0728	0.0702	0.0677	0.0652	0.0627	0.0602	0.0577	0.0552	0.0527	0.0502	0.52
0.48	0.0502	0.0476	0.0451	0.0426	0.0401	0.0376	0.0351	0.0326	0.0301	0.0276	0.0251	0.51
0.49	0.0251	0.0226	0.0201	0.0175	0.0150	0.0125	0.0100	0.0075	0.0050	0.0025	0.0000	0.50
	0.010	0.009	0.008	0.007	0.006	0.005	0.004	0.003	0.002	0.001	0.000	p

ملحق رقم(3): جدول تـــوزيــــــع ستيـــــــودنت

	$t_{0.55}$	$t_{0.60}$	$t_{0.70}$	$t_{0.75}$	$t_{0.80}$	$t_{0.90}$	$t_{0.95}$	$t_{0.975}$	$t_{0.99}$	$t_{0.995}$
1	0.158	0.325	0.727	1.000	1.376	3.08	6.31	12.71	31.82	63.66
2	0.142	0.289	0.617	0.816	1.061	1.89	2.92	4.30	6.96	9.92
3	0.137	0.277	0.584	0.765	0.978	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84
4	0.134	0.271	0.569	0.741	0.941	1.58	2.13	2.78	3.75	4.60
5	0.132	0.267	0.559	0.727	0.920	1.48	2.02	2.57	3.36	4.03
6	0.131	0.265	0.553	0.718	0.906	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71
7	0.130	0.263	0.549	0.711	0.896	1.42	1.90	2.36	3.00	3.50
8	0.130	0.262	0.546	0.706	0.889	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36
9	0.129	0.261	0.543	0.703	0.888	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25
10	0.129	0.260	0.542	0.700	0.879	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17
11	0.129	0.260	0.540	0.697	0.876	1.36	1.80	2.20	2.72	3.11
12	0.128	0.259	0.539	0.695	0.873	1.36	1.78	2.18	2.68	3.06
13	0.128	0.259	0.538	0.694	0.870	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01
14	0.128	0.258	0.537	0.692	0.868	1.34	1.76	2.14	2.62	2.98
15	0.128	0.258	0.536	0.691	0.866	1.34	1.75	2.13	2.60	2.95
16	0.128	0.258	0.535	0.690	0.865	1.34	1.75	2.12	2.58	2.92
17	0.128	0.257	0.534	0.689	0.863	1.33	1.74	2.11	2.57	2.90
18	0.127	0.257	0.534	0.688	0.862	1.33	1.73	2.10	2.55	2.88
19	0.127	0.257	0.533	0.688	0.861	1.33	1.73	2.09	2.54	2.86
20	0.127	0.257	0.533	0.687	0.860	1.32	1.72	2.09	2.53	2.84
21	0.127	0.257	0.532	0.686	0.859	1.32	1.72	2.08	2.52	2.83
22	0.127	0.256	0.532	0.686	0.858	1.32	1.72	2.07	2.51	2.82
23	0.127	0.256	0.532	0.685	0.858	1.32	1.71	2.07	2.50	2.81
24	0.127	0.256	0.531	0.685	0.857	1.32	1.71	2.06	2.49	2.80
25	0.127	0.256	0.531	0.684	0.856	1.32	1.71	2.06	2.48	2.79
26	0.127	0.256	0.531	0.684	0.856	1.32	1.71	2.06	2.48	2.78
27	0.127	0.256	0.531	0.684	0.855	1.31	1.70	2.05	2.47	2.77
28	0.127	0.256	0.530	0.683	0.855	1.31	1.70	2.05	2.47	2.76
29	0.127	0.256	0.530	0.683	0.854	1.31	1.70	2.04	2.46	2.76
30	0.127	0.256	0.530	0.683	0.854	1.31	1.70	2.04	2.46	2.75
40	0.126	0.255	0.529	0.681	0.851	1.30	1.68	2.02	2.42	2.70
60	0.126	0.254	0.527	0.679	0.848	1.30	1.67	2.00	2.39	2.66
120	0.126	0.254	0.526	0.677	0.845	1.29	1.66	1.98	2.36	2.62
∞	0.126	0.253	0.524	0.674	0.842	1.28	1.645	1.96	2.33	2.58

ملحق رقم(4): جـــدول توزيـــــع كاي تربيـــــع

	$x^2_{0.005}$	$x^2_{0.01}$	$x^2_{0.025}$	$x^2_{0.05}$	$x^2_{0.10}$	$x^2_{0.25}$	$x^2_{0.50}$	$x^2_{0.75}$	$x^2_{0.90}$	$x^2_{0.95}$	$x^2_{0.975}$	$x^2_{0.99}$	$x^2_{0.995}$	$x^2_{0.999}$
1	0.0000	0.0002	0.0010	0.0089	0.0158	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.8
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.108	0.211	0.575	1.89	2.77	4.61	5.99	7.33	9.21	10.6	13.8
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.8	12.8	16.3
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9	18.5
5	0.412	0.554	0.881	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	16.1	16.7	20.5
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5	22.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.88	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3	24.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.67	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0	26.1
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6	27.9
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.84	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2	29.6
11	2.60	3.05	8.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8	31.3
12	3.07	3.57	4.40	5.28	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.8	26.2	28.3	32.9
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.8	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8	34.5
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.8	36.1
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	37.7
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.81	11.9	15.8	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	39.3
17	5.70	6.41	7.66	8.67	10.1	12.8	16.8	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	40.8
18	6.26	7.01	8.23	9.89	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.6	34.8	37.2	42.3
19	6.84	7.68	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	43.8
20	7.48	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	45.3
21	8.08	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	88.9	41.4	46.8
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	48.3
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	49.7
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	51.2
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	52.6
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.8	54.1
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	55.5
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.8	51.0	56.9
29	13.1	14.8	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3	58.8
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.8	43.8	47.0	50.9	53.7	59.7
40	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	33.7	39.3	45.6	51.8	55.8	59.8	63.7	66.8	73.4
50	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	42.9	49.3	56.8	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5	86.7
60	35.5	37.5	40.5	43.2	46.5	52.3	59.3	67.0	74.4	79.1	88.3	88.4	92.0	99.6
70	43.3	45.4	48.8	51.7	55.3	61.7	69.3	77.6	85.5	90.5	95.0	100	104	112
80	51.2	53.5	57.2	60.4	64.3	71.1	79.3	88.1	96.6	102	107	112	116	125
90	59.2	61.8	65.6	69.1	73.8	80.6	89.3	98.6	108	113	118	124	128	137
100	67.3	70.1	74.2	77.9	82.4	90.1	99.3	109	118	124	130	136	140	149

ملحق رقم(5): جـــدول توزيـــــع فيـــشر

$$p = 0.95$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.98
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.70	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.80
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.18
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.43	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

ملحق رقم(6): جــــدول توزيــــــع فيـــــشر

$$p = 0.99$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4050	5000	5403	5625	5764	5859	5923	5981	6023	6056	6106	6157	62.09	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
3	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	27.1	26.9	26.7	26.6	26.5	26.4	26.3	26.2	26.1
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.4	14.2	14.0	13.9	13.8	13.7	13.7	13.6	13.5
5	16.8	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.48	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.70	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	3.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.68	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.48	4.10	3.87	3.70	3.66	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.56	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.82	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

قائمة المراجع:

المراجع باللغة العربية:

1. إبراهيم علي إبراهيم عبد ربه، مبادئ علم الإحصاء، الدار الجامعية، مصر، 2002
2. إعداد قسم الإحصاء جامعة الملك عبد العزيز، مبادئ الإحصاء للتخصصات النظرية: الإدارية والإنسانية، الطبعة العاشرة، خوارزم العلمية، السعودية، 2018
3. اياد محمد الهوبي، الاحصاء التطبيقي، الكلية الجامعة للعلوم والتكنولوجيا، الطبعة الاولى، 2014.
4. حسن ياسين طعمة وإيمان حسين حنوش. الإحصاء الاستدلالي. الطبعة الأولى، دار صفاء للنشر والتوزيع: عمان، 2018
5. حسين علوان مطلق، جمع البيانات وطرق المعاينة، الطبعة الأولى، مكتبة العبيكان للنشر، السعودية، 2009
6. جمال رشيد الكحلوت. مبادئ نظرية العينات. مكتبة الفريد الالكترونية، 2003
7. دومينيك سالفادور، الإحصاء والاقتصاد القياسي، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1993.
8. ديفيد جيه هاند. علم الاحصاء: مقدمة صغيرة جدا. ترجمة: أحمد شكل، الطبعة الأولى، مؤسسة هنداوي للنشر، مصر، 2016
9. سعيد التل وآخرون، مناهج البحث العلمي، تصميم البحث والتحليل الإحصائي، دار المسيرة، عمان، الأردن، 2007
10. شبيجل وآخرون. الاحتمالات والإحصاء: ملخصات شوم إيزي. الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر، د ت ن ، ص.96.
11. عبد الرزاق بني هاني، "الاقتصاد القياسي: المبادئ الرياضية والاحصائية، "الطبعة الأولى، دار وائل للنشر، الأردن، 2014.
12. عدنان شهاب حمد ومهدي محسن إسماعيل، أساليب المعاينة في ميدان التطبيق، المعهد العربي للتدريب والبحوث الإحصائية، العراق
13. علي أحمد السقاف. الاحصاء الوصفي والاستدلالي. الطبعة الأولى، إصدار المركز الديمقراطي العربي، برلين المانيا، 2020
14. فايز جمعة صالح النجار وآخرون، أساليب البحث العلمي، منظور تطبيقي، دار الحامد، عمان ، الأردن، 2009.

15. معتوق امحمد، الإحصاء الرياضي والنماذج الإحصائية –سلسلة دروس مع تمارين مختارة، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2015

16. محمد الفاتح محمود بشير المغربي، مبادئ الإحصاء للاقتصاد والعلوم الإدارية، الأكاديمية الحديثة للكتاب الجامعي، مصر، 2022

17. محمد عبد الفتاح الصيرفي، الدليل التطبيقي للباحثين، دار وائل، عمان، الأردن، 2002

18. مركز الاحصاء أبو ضبي. دليل المعاينة الإحصائية: أدلة المنهجية والجودة، دليل رقم (1)، ص.6. متوفر على الموقع:. www.scad.ae

19. موراي شبيجل ،جون شيلرأ الوسيرينيقسان ، ترجمة محمود أبو النصر و مصطفى جلال مصطفى ، الاحتمالات و الإحصاء، ملخصات شوم، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، الطبعة الاولى ، مصر،2004.

المراجع باللغة الأجنبية

20. ANSION Guy, Sondages et statistique, labor éditions, Bruxelles, 1997
21. ARDILLY Pascal, "Les techniques de sondage", édition Technip, Paris, 1994
22. DODGE Yadolah , Premiers pas en statistique. Springer Verlag, France , 2003
23. GRAIS Bernard, Méthodes statistiques: techniques statistiques 2, 3eme édition, édition, Dunod, Paris 1998.
24. HAMDANI Hocine, statistique descriptive, office des publications universitaires, Alger, 2001
25. François Cottet-Emard .probabilités et tests d’hypothèse : cours et exercices corrigés, 1er édition, Belgique ,2014.
26. Olive jean dunn , Virginia A.Clarck, Basic Stastics , Fourth Edition , A jhon wlley & sons publication , United States of America., 2009.
27. TILLE Yves, théorie des sondages, Echantillionnage et estimation en populations finies», Dunod, Paris, 2001.

فهرس الأشكال والجداول:

أولا: فهرس الأشكال

ثانيا: فهرس الجداول

فهرس

المـــلاحـــــــق

فهرس الملاحق

الرقم	عنوان الملحق	الصّفحة
01	جدول التــوزيـــــع الطبيعي المعياري1	95
02	جدول التــوزيـــــع الطبيعي المعياري2	96
03	جدول توزيع ستيودنت	97
04	جدول توزيع كاي تربيع	98
05	جدول توزيع فيشر $p = 0.95$	99
06	جدول توزيع فيشر $p = 0.99$	100

فهرس

المحتويات:

فهرس المحتويات: