الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة سطيف 1

كلية العلوم الاقتصاديّة والتّجارية وعلوم التّسيير

قسم علوم المالية والمحاسبة:

محاضرات في مقياس الإحصاء 3:

موجهة إلى طلبة السنة الثانية علوم المالية والمحاسبة

إعداد : د. جناد مباركة

السنة الجامعية

2021-2020

المقدمـــة

تمهيد:

إن التطور العلمي والتكنولوجي الذي يشهده العالم اليوم ما هو إلا حصيلة لما اكتسبه الانسان من مهارة التعامل مع الأرقام جمعا وتلخيصا وتحليلا لتسهيل الوصول إلى الاستنتاجات وزيادة دقة القرارات في مجالات الحياة المختلفة.

يُعتبر علم الاحصاء ركنا أساسيا في حياة الأفراد والمؤسسات، باعتباره رياضيات جمع البيانات تلخيصها وتحليلها وصولا إلى قرارات مبينة على جزئيات يتم تعميمها بعد ذلك بصورة إجمالية.

وتحت هذا الإطار، تضم هذه المطبوعة دروسا **لمقياس الاحصاء3** والمسمى أيضا **بالإحصاء الاستدلالي** تضم المفاهيم الأساسية لهذا الفرع المهم من فروع الاحصاء مدعمة بأمثلة وتمارين محلولة، وقد تم الحرص في تقديمها على بساطة العرض، بأسلوب سهل ومختصر دون اللجوء إلى البراهين والعمليات الرياضية المعقدة. وهي مُوجهة أساسًا لطلبة السنة الثانية جذع مشترك لقسم المالية والمحاسبة والتي تصُب في إطار المنهاج الوزاري المقرر لهم.

وقد احتوت هذه المطبوعة على ثلاثة محاور أساسية وفق ما هو محدد في المقرر الوزاري وهي كالتالي:

المحور الأول: الاطار المفاهيمي للإحصاء الاستدلالي؛

المحور الثاني: توزيع المعاينة وكيفية بناء مجالات الثقة؛

المحور الثالث: إختبار الفرضيات الإحصائية.

وأخيرا نأمل أن نكون قد وفقنا في الإلمام بكل جوانب هذا العمل وفي تقديمه، وأن يكون مُساهمةً بناءة في إثراء مكتباتنا الجامعية وإفادة الطلبة.

المحور الأول:

الإطار المفاهيمي للإحصاء الإستدلالي

أولا: مفهوم الاحصاء الاستدلالي

1.تعريفه:

يعرف علم الإحصاء بأنه ذلك الفرع من العلوم الذي يختص بالطرق العلمية لجمع وتنظيم وتلخيص وعرض وتحليل البيانات، وذلك بهدف الوصول إلى نتائج مقبولة وقرارات سليمة على ضوء هذا التحليل. وينقسم علم الإحصاء إلى قسمين أساسيين هما: الإحصاء الوصفي **Descriptive Statistics** والإحصاء الإستدلالي **Inferential Statistics** الذي يُعبر عن تلك الطرق العلمية التي تعمل للاستدلال عن معالم المجتمع بناءًا على المعلومات التي تم الحصول عليها من العينة المأخوذة منه، وذلك وفق طرق إحصائية محددة.[1]

بمعنى أنه يتم تقدير مؤشرات المجتمع المجهولة من خلال المؤشرات التي تم الحصول عليها من العينة، حيث يجب مراعاة شروط معينة حتى يكون هذا الإستدلال سليما، وبما أن الاستدلال لا يمكن أن يكون مؤكدًا تأكيدا تاما فإن عرض النتائج المحصلة من هذه العملية تعتمد دائما على ما يسمى بلغة الاحتمال.[2]

ويشمل الإحصاء الإستدلالي فرعين هما: التقدير واختبارات الفروض، يهدف التقدير إلى حساب **"تقريب"** إلى قيمة المعلمة في المجتمع باستخدام الإحصاء الذي تم حسابه من العينة، والذي يسمى **إحصاء العينة Sample Statistics**، أما اختبارات الفروض فتهدف إلى التوصل إلى نتائج وقرارات خاصة بمعلمة المجتمع التي يُعتقد العلم بها، ويود الباحث تأكيد أو نفي القيمة التي يُفترض معرفتها، وذلك باستخدام بيانات العينة.[3]

مما سبق يمكن القول أن الإحصاء الاستدلالي هو الفرع الثاني لعلم الإحصاء والذي يقوم على فكرة أساسية مفادها كيف يمكن الاستدلال على خصائص المجتمع من خلال دراسة عينة اشتقت من هذا المجتمع نفسه، حيث أن مثل هذه العملية تتطلب من الباحث الإلمام بالأساليب الإحصائية حتى يستطيع اختيار الأسلوب الإحصائي الذي يناسب بحثه ونوع العينة.

2.المجتمع، العينة، المعالم، الاحصائيات والمتغيرات:

تعتمد عملية الاستدلال الاحصائي على أن يكون الباحث مُلمًا بمختلف المفاهيم الاحصائية المتعلقة بذلك أهمها: المجتمع، العينة، المعالم، الاحصائيات والمتغيرات.

1.2.المجتمع The Population: يُعرف المجتمع بأنه مجموعة من العناصر أو المفردات التي تخص ظاهرة معينة. ويطلق أحيانا على مصطلح المجتمع، بالمجتمع الاحصائي **Statistical Population**. إن الهدف الرئيسي من تحديد المجتمع الاحصائي هو تعيين الحدود الصريحة لعملية جمع البيانات من جهة، وكذلك لعملية الإستقراء أو الإستنتاجات التي يمكن الحصول عليها من خلال إجراء الدراسة من جهة ثانية.

---

[1] أماني موسى محمد . **التحليل الإحصائي للبيانات**. مركز تطوير الدراسات العليا والبحوث كلية الهندسة لجامعة القاهرة، الطبعة الأولى، 2007، ص.6.

[2] جمال محمد شاكر محمد .**المرشد في التحليل الاحصائي للبيانات باستخدام SPSS**. الدار الجامعية للنشر: الاسكندرية، الطبعة الأولى، 2005، ص.18.

[3] سهير فهمي حجازي ومحمود الدريني .**الاحصاء التطبيقي**. الشركة المصرية لإعادة التأمين: مصر، 2004، ص.9.

ويتمثل المجتمع الاحصائي بعدد العناصر أو المفردات التي يتضمنها، والتي يُطلق عليها مصطلح حجم المجتمع الذي يرمز له بالرمز N.[1] ويقسم المجتمع الاحصائي إلى قسمين هما[2]:

1.2.1.مجتمع محدود Finite Population : والذي يكون عدد أفراده محدود ومثال ذلك أن تكون الدراسة الاحصائية حول أحد أصناف الأدوية المنتجة من طرف مخبر معين وبذلك فإن المجتمع هنا هو الإنتاج الكلي لهذا المخبر من هذا الدواء وعدد وحداته الذي هو عدد العلب المنتجة من هذا الدواء خلال فترة الدراسة معروف ويمكن تحديده.

2.2.1.مجتمع غير محدود: وهو المجتمع الذي يكون عدد أفراده غير منته كعدد النجوم في السماء، عدد حبات القمح المحصود في مزرعة معينة وغيرها.

وتجدر الاشارة هنا إلى أنه في بعض الأحيان يكون من الصعب ملاحظة أو دراسة بيانات جميع أفراد المجتمع لما يكلف ذلك من جهد ووقت ومال، أو قد يكون من المستحيل القيام ذلك كفحص جميع دم المريض مثلا. ولتدارك الأمر يمكن اختيار ودراسة جزء فقط من المجتمع يسمى بالعينة.

2.2. العينة The Sample: تعرف العينة بأنها جزء من المجتمع والذي يتم اختياره بطريقة علمية يراعى فيها أن تكون عينة ممثلة للجتمع **Representative Sample** وهذا حتى تكون مقبولة من الناحية الإحصائية، أي أن تحتوي على جميع الخصائص بنفس نسب تواجدها في المجتمع الاحصائي الذي اخيرت منه وأن تكون هذه العينة ذات دقة **Precision** يمكن قياسها. ويطلق على مفردات العينة عادة مصطلح **حجم العينة** الذي يرمز له بـ n حيث: $n < N$ ، وكلما كان حجم العينة كبير كلما كانت النتائج أكثر دقة وأقرب إلى الواقع.

ينفرد بها فرع خاص من علم الإحصاء يسمى **نظرية العينات**، وذلك بهدف الاستدلال على حقائق معينة حول المجتمع محل الدراسة اعتمادا نتائج هذه العينة، حيث أن عملية اختيار مفردات العينة تسمى **بالمعاينة Sampling**، والتي سيتم التفصيل فيها لاحقا. وهذا في حال ما إذا تطلب الوضع أخذ عينة بدلا عن دراسة المجتمع كله، فقد تؤدي دراسة المجتمع كله إلى فقدان عناصره أو إتلافها، وتفيد المعلومات المتوفرة من العينات في التنبؤ بمعلومات ومؤشرات عن المجتمع كله. ومن مميزات العينة أنها أقل تكلفة وأكثر سرعة وأكثر شمولا لإمكانية الحصول على إجابات عن المعلومات المطلوبة بشمول أكبر من الحصر الشامل لأفراد المجتمع محل الدراسة. وكذلك تكون أكثر دقة وذلك بسبب إمكانية استخدام أشخاص ذوي كفاءة عالية ومدربين لأخذ العينات من المجتمع محل الدراسة.[3]

[1] حسن ياسين طعمة وإيمان حسين حنوش. **الإحصاء الإستدلالي**. الطبعة أولى، 2018، دار صفاء للنشر والتوزيع: عمان، ص.181.

[2] أماني موسى محمد ، مرجع سبق ذكره، متفرقة: ص.6-7.

[3] أنظر كل من:

-Mathieu Rouaud. **Probabilités, statistiques et analyses multicritères**. 2013, cretive commons :boudiguen France, P.7.

- شبيجل وآخرون. **الإحتمالات والإحصاء: ملخصات شوم إيزي**. الدار الدولية للإستثمارات الثقافية: مصر، د ت ن، ص.68.
- أماني موسى محمد ، مرجع سبق ذكره، ص.7.

باختصار فإن العينة ماهي إلا صورة مصغرة عن المجتمع الذي أخذت منه، تحمل كل صفاته التي تميزه عن باقي المجتمعات فنقول أنها ممثلة لهذا المجتمع أفضل تمثيل، حيث أن شرط التمثيل هذا أساسي حتى تكون عملية تعميم النتائج المحصل عليها من هذه العينة صحيحة ويمكن الاعتماد عليها.

3.2. معالم المجتمع Population Parameters: يقصد بالمعالم تلك المؤشرات المحسوبة من بيانات المجتمع أخذا بعين الاعتبار كل وحدات هذا المجتمع، أي أن الدراسة هنا تكون شاملة، وتتمثل معالم المجتمع أساسا في متوسطه الذي يرمز له عادة بـ μ، نسبة المجتمع p، انحرافه المعياري σ وتباينه σ^2.

4.2. إحصائيات العينة A Sample Statistics: تتمثل إحصائيات العينة في تلك القيم المحسوبة من بيانات العينة والتي تعتبر **تقريبا** لتلك التي تقابها في المجتمع، حيث يُستدل بها على هذه المعالم التي تكون عادة مجهولة وهي: متوسط العينة $\bar{x}$، نسبة العينة f، الانحراف المعياري للعينة s وتباينها s^2.

5.2. المتغيرات Variables : إن الصفة التي تتغير من شخص إلى آخر أو من مفردة إلى أخرى تسمى بالمشاهدة **Observation** أو بالمتغير **Variable** ويرمز لكل مفردة من مفردات المتغير بالرمز x_i .[1]

أي أن المتغير يمثل صفة أو سمة متغيرة للبيانات قيد الدراسة ومثال ذلك طول الجسم وزن الجسم عدد كريات الدم الحمر أو لون العين وغيرها.[2]

3.العلاقة بين البيانات والمتغيرات: تعبر البيانات عن قيم لمتغير أو أكثر من المتغيرات الإحصائية، ويرتبط نوع البيانات بنوع المتغير الدروس وعليه فإن أنواع المتغيرات الإحصائية تمثل بدورها أنواع البيانات التي يمثلها هذا المتغير.

ثانيا:البيانات الإحصائية

البيانات هي المادة الخام التي ينى عليها الاحصاء وكذلك هي المادة الخام التي تحسب منها الاحصائيات الفردية نفسها وأن هذه البيانات عادة ماتكون أرقاما ومع ذلك فإن البيانات في الواقع أكثر من مجرد أرقام.[3]

1.طبيعة البيانات: تُقسم البيانات **Data** إلى نوعين هما[4]:

1.1.البيانات الوصفية أوالنوعية Qualitative Data: وهي المشاهدات أو الصفات التي لا يمكن قياسها مباشرة بوسائل القياس المألوفة كالعد والتقييس، ومثال ذلك صفة لون العين (أسود، أزرق، أخضر،...)، المؤهل

- حسن ياسين طعمة وإيمان حسين حنوش، مرجع سبق ذكره، ص.181-182.

[1] حسن ياسين طعمة وإيمان حسين حنوش، مرجع سبق ذكره، ص.180.

[2] فراس رشاد السامرائي. **الاحصاء واختبارات التشخيص الطبية**. كلية الطب البيطري لجامعة بغداد: 2015، ص.4.

[3] ديفيد جيه هاند. **علم الاحصاء: مقدمة صغيرة جدا**. ترجمة: أحمد شكل، الطبعة الاولى، 2016، مؤسسة هنداوي للنشر: مصر، ص.15.

[4] أنظر كل من:

- حسن ياسين طعمة وإيمان حسين حنوش، مرجع سبق ذكره، ص.180-181.
- وليد عبد الرحمن الفرا. **مباديء علم الاحصاء**. المملكة العربية السعودية، 2004، ص.3-4.

العلمي (ليسانس، ماجستير، دكتوراه وغيرها)، صفة الجنس (ذكر، أنثى)، صفة الحالة الاجتماعية (أعزب، متزوج، مطلق، أرمل). وتنقسم إلى بيانات قابلة للترتيب مثل: صغير، متوسط، كبير، وأخرى غير قابلة للترتيب مثل البيانات الخاصة بصفة الجنس: ذكر، أنثى.

2.1.البيانات الكمية أو العددية Quantitative Data: وهي المشاهدات أو الصفات التي يمكن قياسها مباشرة بوسائل القياس المألوفة، مثال ذلك عدد الطلبة في جامعة معينة، صفة الطول، أوزان الطلبة، أعمارهم وغيرها.

وتكون البيانات الكمية على نوعين هما:

1.2.1.البيانات المتقطعة Discrete Data:

وهي البيانات الخاصة بالمتغيرات المنفصلة وتُعبر عن تلك المشاهدات أو الصفات التي تأخذ قيما متميزة عن بعضها كعدد الطلبة في الصف الدراسي، عدد أفراد الأسرة، عدد الوحدات المنتجة من دواء معين في شركة ما، أو عدد الحالات التي تظهر في تجربة عشوائية عند رمي زهرة النرد وغيرها. ويمكن تسميتها أيضا بالبيانات القابلة للعد.

2.2.1.البيانات المتصلة Continuous Data:

تمثل البيانات الخاصة بالمتغيرات المتصلة وتشمل المشاهدات أو الصفات التي تأخذ قيما غير منتهية يمكن حصرها في مجال معين، ومثال ذلك: أوزان طلبة جامعة معينة، أو أطوال عينة من الطلبة بكلية ما، ويمكن تسميتها بالبيانات القابلة للتجزئة.

وللتوضيح أكثر هنا نجد أنه من المكن أن يكون ضغط الدم للمريض 120 أو120.1 أو 120.2 أو 120.3 وهكذا تكون الأعداد متصلة أي أن هذه البيانات متصلة، بينما عدد أفراد الأسرة ممكن أن يكون 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو غير ذلك أي أن هذه الأعداد صحيحة لا يوجد بها كسور عشرية فهي بيانات متقطعة أو منفصلة.

2.مصادر جمع البيانات:

يقصد بجمع البيانات الحصول على معلومات رقمية أو وصفية حول ظاهرة معينة من مصدر معين خلال فترة زمنية محدودة، وذلك بهدف وصف الظاهرة أو حل مشكلة ما، حيث تساعد البيانات في تحديد حجم المشكلة وتسهل الطريق لاتخاذ القرار المناسب.

وتجمع البيانات من مصدرين أساسيين هما[1]:

---

[1] أنظر كل من:

- عابد العبدلي. **مباديء الإحصاء**. ص.4. متوفرة على الموقع:http://uqu.edu.sa/staff/ar/4180200
- عماد توماكرش وآخرون. **علم الإحصاء**. العراق، هيئة التعليم التقني، 2014، ص.20-21.

1.2.المصادر التاريخية: وهي البيانات التي يتم الحصول عليها من الإحصاءات والنشرات التي تنشرها الأجهزة الإحصائية والهيئات المتخصصة في الدولة، مثل التقارير الإحصائية السنوية أو الربع سنوية أو الشهرية. أي أنها تلك البيانات المحفوظة لدى أجهزة الدولة المختلفة نتيجة الاستقصاءات أو مسوحات قامت بها هذه الجهات لأغراض خاصة بها أو تجمعت لديها بحكم وظائفها، حيث يوفر هذا المصدر على الباحث الجهد والمشقة والوقت الذي كان سيبذله في جمعها من الميدان. ومثال ذلك البيانات المتجمعة عن تعدادات السكان، إحصاءات الطلبة المتخرجين من الجامعات وغيرها من الإحصاءات.

2.2.المصادر الميدانية: إذا لم تتوفر البيانات من المصادر التاريخية، يلجأ الباحث إلى المصدر الأصلي لجمع البيانات، أي من خلال جمع البيانات ميدانيا عن طريق المراسلة عبر البريد أو المقابلة الشخصية أو عن طريق الهاتف أو أي وسيلة إتصال أخرى. حيث يتم غالبا تصميم استمارة إحصائية أو مايسمى أيضا بالإستبيان، تتضمن مجموعة من الأسئلة أو الفقرات يضعها الباحث من أجل الحصول على البيانات المطلوبة عن الظاهرة محل الدراسة.

3.طرق جمع البيانات:

يتم جمع البيانات عموما بإحدى الطرق التالية[1]:

1.3.المقابلة الشخصية: حيث يقوم الباحث بجمع البيانات من خلال مقابلة أفراد العينة وطرح الأسئلة عليهم وتدوين الإجابات. وتعتبر هذه الطريقة مناسبة في حالة انتشار الأمية بين المبحوثين كما تمكن الباحث من التأكد من صحة البيانات وتدوينها.

2.3.المراسلة: يقوم الباحث وفق هذه الطريقة بارسال استمارات البحث إلى المبحوثين عن طريق البريد مرفقا معها ارشادات تعبئة الاستمارة وأهداف البحث وأهميته، ويرفق معها ظروف بريدية مسبقة الدفع. وتعتبر هذه الطريقة مناسبة في حال عدم انتشار الأمية بين الأفراد محل البحث. وتتميز بانخفاض تكلفتها، وحاليا يمكن المراسلة عبر شبكة الانترنت والبريد الالكتروني إلى شريحة كبيرة من الأفراد وبذلك أصبحت هذه الطريقة تتميز بالسرعة وإنعدام التكاليف.

4.أساليب جمع البيانات:

يتم جمع البيانات ميدانيا بأحد الأسلوبين[2]:

---

[1] عابد العبدلي، مرجع سبق ذكره، ص.4..

[2] أنظر كل من:

- حسن ياسين طعمة وإيمان حسين حنوش، مرجع سبق ذكره، ص.182-183.
- جمال رشيد الكحلوت. **مبادئ نظرية العينات**. مكتبة الفريد الالكترونية، 2003، ص.1.
- أحمد عبد السميع طيبة .**مبادئ الاحصاء**. الطبعة الأولى، 2008، عمان: دار البداية للنشر،الأردن، ص.14.
- عماد توماكرش وآخرون، مرجع سبق ذكره، ص.14.

1.4.أسلوب الحصر الشامل Census Method : وفيه تجمع البيانات عن كل مفردة من مفردات المجتمع، ويستخدم هذا الأسلوب في الأبحاث الإحصائية الكبيرة، التي تجرى وفق فترات زمنية متباعدة. ومثال ذلك التعداد السكاني الذي يجرى عادة كل عشر سنوات أو تعداد المساكن لدولة ما والتعدادات الصناعية الزراعية التي تجريها الدول وتدعمها بامكانيات ضخمة، فهي تتطلب وفرة في الوقت والمال والمجهود الفني، حيث تزداد هذه المتطلبات وتتضاعف كلما ازداد حجم المجتمع، لذلك تتكفل به عادة الأجهزة الحكومية. ومن شروط استخدام أسلوب الحصر الشامل يجب أن يكون المجتمع الإحصائي المدروس محدودا.

2.4.أسلوب المعاينة Sampling Method: يعتمد هذا الأسلوب على جمع البيانات من بعض أفراد المجتمع فقط، يتم اختيارهم بطرق معينة لتشكيل ما يسمى **بالعينة**. ليتم فيما بعد تعميم النتائج المستخلصة من دراسة هذه العينة على المجتمع بأكمله. ويتوقف نجاح هذا الأسلوب على مدى دقة تمثيل العينة للمجتمع المسحوبة منه.

ومن هنا يمكن تعريف المعاينة بأنها: **طريقة إحصائية تستخدم في اختيار مفردات العينة من مجتمع الدراسة وفق أسس علمية بما يضمن أن تكون العينة المختارة تمثل مجتمع الدراسة أفضل تمثيل وهذا بغرض دراسة خصائص هذا المجتمع.**

ويمتاز أسلوب المعاينة على أسلوب الحصر الشامل بكونه:

- يتطلب مستلزمات مادية وبشرية أقل مما يتطلبه أسلوب الحصر الشامل؛
- يوفر الجهد والوقت اللازم لاجراء البحث؛

ومن عيوب هذا الأسلوب أن محاولة التعرف على خواص المجتمع عن طريق دراسة جزء منه ينطوي عليه التضحية في دقة النتائج التي يوفرها أسلوب المعاينة.

ثالثا: المعاينة الإحصائية

1.خطوات تصميم العينة:

للقيام بعملية المعاينة ينبغي الالتزام بعدة خطوات أساسية يمكن حصرها فيما يلي[1]:

1.1.تحديد المشكلة والهدف: في أول خطوة يجب تحديد هدف المعاينة أو المشكلة المراد دراستها تحديدا واضحا، ويستلزم الأمر تعريف المشكلة المدروسة والهدف من دراستها. وذلك بغرض تمييز المشكلة الاحصائية المطلوبة ليتم بعد ذلك البحث عن التصميمات الممكنة أو عن الأسئلة المطلوبة، وتحديد مصادر الحصول عليها بما يخدم أهداف الدراسة.

[1] جميل أحمد .**أساليب المعاينة، القياس وتحليل البيانات**. المركز الجامعي بويرة، ص.198-199.

2.1.تعريف وتحديد المجتمع المراد معاينته: ينبغي تعريف المجتمع المراد معاينته تعريفا دقيقا مع تحديد عناصره بحيث يمكن الحكم على انتماء كل عنصر إلى المجتمع من عدمه بكل سهولة، كما يجب تحديد الفترة الزمنية المراد فيها إجراء هذه الدراسة.

3.1.تحديد البيانات المطلوب جمعها: وذلك على ضوء أهداف البحث وفرضياته، وطرق التحليل التي سيتم اتباعها، وطبيعة الوحدات والمجتمع، من خلال استشارة كل من مستخدم البيانات والباحث الذي يحللها واعتمادا على جميع المصادر التي تتضمن هذه البيانات.

4.1.تحديد درجة الدقة المطلوبة: قد تكون هناك بعض الشكوك في نتائج الدراسات التي تتم باستخدام العينات، وذلك لأن العينة قد لا تشمل بعض الوحدات الهامة، فهي عبارة عن جزء فقط من المجتمع بالاضافة إلى أخطاء القياس التي تحدث خلال الدراسة، وعليه يمكن زيادة الدقة بأخذ عينات أكبر حجما واستخدام أجهزة قياس أكثر دقة مما يترتب عليه زيادة التكاليف.

5.1.تحديد طريقة جمع وقياس البيانات: يجب على الباحث أن يحدد الطريقة الأنجع التي تستخدم لجمع المعلومات ومن أهمها:

1.5.1.القياس المباشر: وذلك بإجراء القياسات اللازمة لتحديد الخاصة المراد دراستها في وحدات العينة؛

2.5.1.الإتصال المباشر: كالمقابلة الشخصية وتوجيه أسئلة مباشرة للوحدات المختارة في العينة؛

3.5.1.الإتصال غير المباشر: وذلك عن طريق توجيه الأسئلة عن الهاتف الفاكس البريد الإلكتروني وغيرها.

ويمكن استخدام هذه الطرق مقترنة مع بعض إلا أن طريقتي القياس والإتصال المباشر هما أضمن الطرق من حيث الحصول على معلومات مقبولة، مع العلم أنها أكثر تكلفة من طريقة الإتصال غير المباشر.

6.1.تحديد الإطار: يتعين تكوين إطار بوحدات المعاينة حتى يمكن اختيار العينة، والمتمثل في قائمة تضم كل وحدات المجتمع المدروس.

7.1.تعيين وحدة المعاينة ونوع العينة وتحديد حجمها ومعرفة تكاليفها، ويجرى تحديد حجم العينة بناءا على الدقة المطلوبة وعلى تباين المجتمع الذي يحدد بالرجوع إلى الدراسات السابقة أو إجراء اختبار سابق على ذلك المجتمع.

8.1.ترتيب عمل الميدان: ويشمل تجهيز الخرائط اللازمة لمكان المسح وتدريب العدادين وآلية للمراجعة لضبط نقاط الضعف في الاستمارة، كما يشمل عمل ترتيب خاص في حالة عدم الاجابة.

9.1.إجراء اختبار مسبق: قبل البدء في توزيع استمارة البحث على كل وحدات العينة المطلوبة وحتى قبل طباعة العدد اللازم منها، يتم اختبار الاستمارة بتوزيعها على مجموعة من الأفراد كعينة اختبارية من وحدات المجتمع موضوع الدراسة، وبناءا عليه يمكن تعديل الاستمارة إذا لزم الأمر.

10.1.بتلخيص وتبويب المعطيات المتحصل عليها وتحليلها للحصول على تقديرات معالم المجتمع وقياس دقتها.

2.**أقسام المعاينة**: تنقسم المعاينة عادة إلى قسمسن رئيسيين هما: معاينة عشوائية (إحتمالية) ومعاينة غير عشوائية (غير إحتمالية) وفيما يلي تفصيل لكل منها:

1.2.المعاينة العشوائية (الاحتمالية) Probability Sampling :

هي ذلك الأسلوب الذي يتم فيه اختيار مفردات العينة حسب خطة احصائية لا يكون فيها للباحث أو لمفردات العينة دخل في اختيار أي مفردة منها، حيث يتم الاختيار باستخدام أساليب معينة تلعب الصدفة خلالها الدور الأول في اختيار المفردة ولكن بشرط أن يتحقق لجميع المفردات احتمال ثابت ومحدد للاختيار. والعينات العشوائية إذا ما تم اختيارها بالطريقة العلمية السليمة والمناسبة يمكن أن تكفل درجة عالية من دقة التمثيل للمجتمعات المسحوبة منها، لذلك فهي الوسيلة الأساسية في حالة البحوث العلمية الدقيقة.[1]

إن كلمة عشوائية هنا لا تعني أن هذا النوع من العينات يسحب بطريقة اعتباطية بل تعني إتاحة فرصة الاختيار لجميع مفردات الظاهرة المدروسة. كما تعتمد المعاينة العشوائية أيضا على توفر إطار للمعاينة، وعلى العكس من المعاينة غير الاحتمالية فإنها تسمح بتقييم مدى دقة النتائج، حيث أنها لا تسمح فقط بتقدير معالم المجتمع وإنما بقياس الخطأ المحتمل في النتائج أيضا الذي ينتج عادة عن الدراسة الجزئية كبديل لأسلوب الحصر الشامل.[2]

وتكون المعاينة العشوائية على أنواع عدة أهمها:

1.1.2.المعاينة العشوائية البسيطة Simple Random Sampling: ويلجأ إليها الباحث في حالة ما إذا كان مجتمع الدراسة ليس كبيرا ويحمل قدرا من التجانس بين وحداته للصفة أو الصفات محل الدراسة. توفر فُرصًا متكافئة لكل عناصر المجتمع للدخول في العينة ولكن المفردات التي تدخل في العينة تكون عن طريق الصدفة البحتة. ولكي يتحقق ذلك فإن الأمر يتطلب تحديد عناصر المجتمع تحديدا كاملا، حيث يكون هذا التحديد على شكل قائمة أو خريطة تضم كل عناصره وهذه القائمة تسمى **الإطار Frame** ولا يجوز الاختيار العشوائي إلا من المفردات التي يضمها الإطار.[3] كما تعد المعاينة العشوائية البسيطة من أبسط أنواع المعاينة الاحتمالية إلا أنها طريقة غير عملية في حالة المجتمعات الكبيرة وفي حالة وجود قيم شاذة أو متطرفة جدا.

[1] جمال رشيد الكحلوت، مرجع سبق ذكره، ص2. –3.

[2] DODGE Yadolah . **Premiers pas en statistique.** Springer Verlag,2003, France, P.217.

[3] جمال رشيد الكحلوت، مرجع سبق ذكره، ص.3.

ولتوضيح أسلوب العمل وفق هذا النوع نفترض أنه لدينا مجتمع محدود ومتجانس بحجم **N** عنصر ويراد اختيار عينة عشوائية بسيطة بحجم **n** عنصر، فإن إحتمال ظهور أي مفردة ضمن مجتمع الدراسة يساوي $\frac{1}{N}$ وعدد العينات الممكن اختيارها من هذا المجتمع هو: $\boldsymbol{c_n^N = \frac{N!}{n!(N-n)!}}$. وتتلخص الطريقة العشوائية للاختيار بكتابة أسماء مفردات المجتمع أو أرقامها على بطاقات متشابهة تماما ثم خلطها جيدا بحيث يستحيل تمييز أي منها ثم اختيار عددا من البطاقات مساوٍ إلى حجم العينة المطلوبة. إلا أن هذه العملية تعد مطولة ومملة عندما يكون حجم المجتمع كبير جدا لذلك يتم اللجوء في هذه الحالة إلى طريقة بديلة تضمن الأسلوب العشوائي في عملية الإختيار تسمى **طريقة جداول الأرقام العشوائية Tables of Random Numbers**.[1]

ويكون السحب بطريقتين هما:

أ. **السحب بالإرجاع :** وتسمى في هذه الحالة بالمعاينة العشوائية البسيطة مع الإعادة **ESAR** ، حيث يمكن للعنصر الواحد أن يظهر في العينة أكثر من مرة، وبذلك نحصل على عينة مستقلة؛

ب. **السحب بدون إرجاع:** تسمى في هذه الحالة بالمعاينة العشوائية البسيطة بدون إعادة **ESSR** ، إذ لا يمكن للعنصر الواحد أن يظهر في العينة أكثر من مرة ونحصل بذلك على عينة غير مستقلة.

2.1.2.المعاينة العشوائية الطبقية Stratified Random Sampling:

تستخدم المعاينة الطبقية كبديل للمعاينة العشوائية البسيطة لزيادة الدقة في التقديرات في حالة عدم تجانس المجتمع الأصلي للدراسة من حيث الخصائص ذات الصلة بموضوع البحث، والتي تعد من أفضل أنواع المعاينة الإحتمالية وأكثرها دقة في تمثيل مجتمع الدراسة. تقوم على تقسيم المجتمع إلى طبقات حسب خصائص معينة لها علاقة بموضوع البحث، ليتم الحصول على طبقات متجانسة وغير متقاطعة مع بعضها البعض، ويشترط هنا أن يكون عدد الطبقات صغير لتفادي الحسابات المتعددة والطويلة من جهة والتوصل إلى درجة دقة معقولة من جهة أخرى، ومن ثم اختيار عينة عشوائية بسيطة من كل طبقة لتشكل في مجموعها حجم العينة المطلوبة. وهذا بمراعاة أن تكون نسبة تواجد كل طبقة في العينة بنفس نسبة وجودها داخل المجتمع. ولتوضيح العملية أكثر نفترض أنه لدينا مجتمع إحصائي غير متجانس حجمه **N** عنصر، بحيث يمكن تقسيم هذا المجتمع إلى طبقات متجانسة وليكن عددها **K** ونريد سحب عينة عشوائية طبقية حجمها **n**، فيتم ذلك وفق الخطوات التالية:

أ.نقسم المجتمع إلى طبقات عددها k ولتكن: $N_1, N_2, N_3 \dots\dots\dots N_k$ ؛

ب.نسحب عينة عشوائية بسيطة من كل طبقة بحيث يتناسب عدد مفردات كل عينة مع حجم كل طبقة لتكون في مجموعها حجم العينة n المطلوب، ويمكن الحصول على حجم هذه العينات وفقا للصيغة الآتية:

[1] حسن ياسين طعمة وايمان حسين حنوش، مرجع سبق ذكره، ص.184-185.

$$n_i = N_i \times \frac{n}{N}$$

حيث أن:

n_i : حجم العينة رقم (i)؛

N_i : حجم الطبقة رقم (i)؛

N : حجم المجتمع الإحصائي؛

n: حجم العينة المطلوب، إذ أن: $n = \sum_i^k n_i$.[1]

3.1.2.المعاينة العشوائية المنتظمة Systematic Random Sampling :

تعتبر المعاينة المنتظمة أكثر أنواع المعاينة الاحتمالية إستخداما في الأجهزة الاحصائية وبالأخص في حال تجانس مجتمع الدراسة. وهي ليست عشوائية بشكل تام لأن فيها نوع من الانتظام في تشكيل العينة، تتميز بالسهولة والبساطة وقلة الأخطاء التي ترتكب في اختيار مفرداتها. ويتم العمل بها إذا أردنا تشكيل عينة منتظمة مكونة من n عنصر مسحوبة من مجتمع حجمه N عنصر وفقا للخطوات التالية:

أ. ترقيم وترتيب مفردات المجتمع الإحصائي على نحو تصاعدي أو تنازلي أو وفق أي معيار آخر للترتيب وليكن من المفردة 1 إلى المفردة N، وبذلك فإن العينة المنتظمة تتطلب وجود إطار لمفردات المجتمع؛

ب. إيجاد ما يسمى **بفترة المعاينة Sample Interval** r حيث: $r = \frac{N \text{حجم المجتمع}}{n \text{حجم العينة}}$، ليُقسم بعدها المجتمع إلى مجموعات في كل منها r عنصر؛

ت. اختيار العنصر الأول للعينة بسحب عنصر عشوائيا من المجموعة الأولى وليكن **b** أي أن b يكون محصورا بين 1 وr، وبذلك فإن العنصر الأول للعينة المنتظمة هو العنصر الذي يحمل الرقم b؛

ث. يتم الحصول على باقي عناصر العينة المنتظمة بمراعاة أن تحمل هذه العناصر أرقاما تشكل فيما بينها حدود متتالية حسابية حدها الأول b، أساسها r وعدد حدودها n، وهذه الأرقام هي:

$$\{(b), (b+r), (b+2r), (\,b+3r), \ldots\ldots\ldots (b+(n-1)r)\}$$

وعلى هذا الأساس نجد في النهاية أن جميع المجموعات تساهم بمفردة واحدة في تكوين حجم العينة n.[2]

---

[1] أنظر كل من:

- حسن ياسين طعمة وايمان حسين حنوش، مرجع سبق ذكره، ص.185-186.
- جمال رشيد الكحلوت، مرجع سبق ذكره، ص.3-4.

[2] أنظر كل من :

- جمال رشيد الكحلوت، مرجع سبق ذكره، ص.3.
- حسن ياسين طعمة وايمان حسين حنوش، مرجع سبق ذكره، ص.188.

وتتصف العينات الاحتمالية ببعض الخصائص الرياضية نوجزها بالآتي[1]:

- إمكانية تحديد مجموعة العينات التي يمكن اختيارها من بين مجتمع الدراسة، وتحديد المفردات التي تنتمي إلى كل عينة من هذه العينات؛
- إن لكل عينة من هذه العينات إحتمال محدد ومعروف يعبر لنا عن فرصة الاختيار؛
- إن اختيار مفردات كل عينة يتم وفق الإحتمال المحدد لكل عينة من هذه العينات؛
- إن طرق حساب المقدرات يتم وفق تحديد مسبق وموحد.

2.2.المعاينة غير العشوائية (غير الاحتمالية) Non-Probability Sampling:

وهي المعاينة التي لا تخضع في طريقة اختيار مفردات العينة فيها إلى مبدأ تكافؤ الفرص في الظهور أي لا تكفل لجميع مفردات المجتمع احتمال ثابت ومحدد للاختيار، وإنما يحكمها التدخل أو التحكم الشخصي للباحث في عملية اختيار المفردات وذلك لأغراض واعتبارات تتعلق عادة بطبيعة المشكلة المدروسة. مما يجعل النتائج المتحصل عليها من تطبيق هذا النوع من المعاينة تقريبية وأقل دقة مقارنة بتلك التي يحصل عليها من المعاينة العشوائية.[2]

ومن أهم أنواعها والأكثر شيوعا واستخداما نجد:

1.2.2.المعاينة العمدية أو المقصودة Purposive Sampling:

يلجأ الباحث إلى هذا النوع إذا كان مجتمع الدراسة كبيرا جدا وكانت امكانياته لا تسمح له إلا بدراسة عينة حجمها صغير جدا، في هذه الحالة يتعمد الباحث اختيار مفردات معينة يرى بخبرته السابقة أن هذه العينة يمكن أن تعطي تمثيلا مقبولا لمجتمع الدراسة. فإذا أراد الباحث مثلا دراسة خصائص معينة عن ريف دولة ما، وكانت إمكانياته المالية والإدارية لا تسمح له سوى بمعاينة سكان قرية واحدة، فإنه في هذه الحالة إذا ما تم اختيار القرية عشوائيا من بين آلاف القرى بتلك الدولة فإن الصدفة قد تأتي بقرية بعيدة في خصائصها عن خصائص معظم قرى تلك الدولة. لهذا فإن الباحث وعلى ضوء خبراته السابقة يتعمد اختيار قرية معينة يرى من وجهة نظره الشخصية أنها يمكن أن تمثل الريف أفضل تمثيل، وهذه الطريقة غير عملية وغالبا يتم اللجوء إليها

---

[1] حسن ياسين طعمة وايمان حسين حنوش، مرجع سبق ذكره، ص.183-184.

[2] انظر كل من:

- جمال رشيد الكحلوت، مرجع سبق ذكره، ص.4.
- حسن ياسين طعمة وايمان حسين حنوش، مرجع سبق ذكره، ص.192-193.

في حالة البحوث التمهيدية. وتسمى العينة القصدية أحيانا بالعينة الهادفة أو العينة الحكمية **Judgmental Sample**.[1]

2.2.2.المعاينة الحصصية Quota Sampling:

تعد المعاينة الحصصية أو معاينة الحصص أكثر أنواع المعاينة غير الاحتمالية استخداما، والتي تقوم على اختيار عدة خصائص للمجتمع ترتبط بموضوع البحث تسمى **متغيرات المراقبة** كالسن، المهنة، الحالة الاجتماعية وغيرها. تستخدم كثيرا في عمليات استطلاع الرأي العام في حالة المجتمعات الاحصائية غير المتجانسة، حيث يقسم المجتمع موضوع الدراسة إلى طبقات متجانسة نسبة إلى صفات أو خصائص معينة، ثم اختيار عينة من كل طبقة بشكل قصدي بنسبة وجودها في المجتمع الأصلي لتشكل في مجموعها حجم العينة المطلوبة. كما لاتحتاج معاينة الحصص إلى إطار المعاينة وهذا ما يتناسب مع الحالات التي يتعذر فيها توفير إطار المعاينة وكذا الدراسات التي تتطلب السرية.

ورغم أن هذه الطريقة في ظاهرها مماثلة للعينة الطبقية العشوائية إلا أن الاختلاف يكمن في أنه في حالة العينة الطبقية يكون اختيار المفردات عشوائيا ولا يترك لجامع البيانات حرية اختيار المفردات من كل طبقة مما قد يترتب عليه تحيزا كبيرا.[2]

رابعا: مصادر الأخطاء في العينات

عند استخدام أسلوب المعاينة كأسلوب لجمع البيانات قد يقع الباحث في العديد من الأخطاء تُدرج تحت مُسمى **أخطاء المعاينة الكلية**، والتي يمكن تقسيمها إلى أخطاء المعاينة العشوائية وأخطاء التحيز:

1.أخطاء المعاينة العشوائية Random sampling errors :

وهي الأخطاء التي تنتج عن الاختلاف أو التشتت بين قيم الوحدات التي تتكون منها العينة، بالاضافة إلى تلك الوحدات التي لم تشأ الصدفة أن ندخلها في العينة حيث يسمى هذا الخطأ بخطأ المعاينة العشوائي. ويعتمد الحجم المتوسط لأخطاء المعاينة العشوائية على كل من: حجم العينة، مدى تشتت مفرداتها وطريقة اختيار الوحدات.

2.أخطاء التحيز Bais errors:

[1] المرجع نفسه.

[2] أنظر كل من:

-GRAIS Bernard. **Méthodes statistiques :techniques statistiques.2**. 2003 ,3eme édition, Dunod, Paris. P.232.

- جمال رشيد الكحلوت، مرجع سبق ذكره، ص.5.

- حسن ياسين طعمة وايمان حسين حنوش، مرجع سبق ذكره، ص.194-195.

لخطأ التحيز ثلاثة أنواع هي[1]:

1.2.خطأ التحيز في الاختيار: وينتج هذا النوع من الأخطاء عن الاختيار غير العشوائي لوحدات العينة، اعتماد بعض طرق الاختيار على خاصية معينة كالاعتماد على دليل الهاتف، التحيز المقصود أو غير المقصود في اختيار بعض وحدات العينة كاستبدال وحدة بوحدة أخرى غير مدرجة ضمن الاطار، عدم التمكن من استكمال وصول جميع الاستمارات؛

2.2.خطأ التحيز في التقدير: وهو انحراف متوسط جميع التقديرات الممكنة لمعلمة المجتمع عن قيمتها الحقيقية والذي ينتج عموما من عدم استخدام طرق التقدير أو التحليل المناسبة. ومن الصعب اكتشاف هذا الخطأ والتخلص منه إلا باجراء تعديلات جذرية على تصميم الدراسة أو طريقة جمع البيانات أو تعديل النتائج.

3.2.خطأ التحيز الناتج عن التعريف الخاطيء لوحدة المعاينة.

4.2.أخطاء أخرى شائعة في العينات: ومنها أخطاء عدم الاستجابة الناتجة عن عدم تحديد الإطار، أخطاء التبويب ومعالجة البيانات، أخطاء الطباعة وأخطاء تفسير النتائج.

خامسا: التوزيعات الاحتمالية المتصلة

إن أغلب الظواهر العشوائية يمكن التعبير عنها بمجموعة من القوانين الإحتمالية والتي تصنف إلى قوانين إحتمالية لمتغيرات عشوائية منفصلة وأخرى متصلة، حيث سيتم فيما يلي تناول أهم القوانين الإحتمالية المتصلة على إعتبار أنها تستخدم بكثرة في الإحصاء الاستدلالي وهي:

1.التوزيع الطبيعي: Normal Distribution

يعتبر التوزيع الطبيعي من التوزيعات المستمرة التي تستخدم في جميع مجالات الاحصاء، وترجع أهمية التوزيع الطبيعي إلى أربع اعتبارات مهمة هي[2]:

أ. أن كثيرا من المتغيرات تتوزع توزيعا طبيعيا ومنها الصفات البيولوجية أو النفسية أو الاجتماعية وغيرها؛

ب. توزيعات المعاينة لمتوسطات العينات تكون مقاربة للتوزيع الطبيعي ويزداد هذا التقارب كلما زاد حجم العينة؛

ت. إمكانية تحويل توزيعات كثيرة إلى التوزيع الطبيعي؛

---

[1] أنظر كل من:
- جميل أحمد، مرجع سبق ذكره، ص.200-202. متفرقة.
- مركز الاحصاء أبو ضبي. **دليل المعاينة الإحصائية: أدلة المنهجية والجودة، دليل رقم (1)**، ص.6. متوفر على الموقع: www.scad.ae .

[2] عزيز مهدي عابد الشماري. **إحصاء متقدم: التوزيعات الاحتمالية المستمرة**. 2015، مجموعة محاضرات في مقياس الإحصاء.

ث. إن معظم الاختبارات المستخدمة في الاستنتاج الاحصائي مبنية على كون المتغير يتوزع توزيعا طبيعيا.

ويكون المتغير العشوائي المتصل x خاضعا للتوزيع الطبيعي إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية $f(x)$ معرفة كما يلي:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}}$$

حيث:

σ : الانحراف المعياري للتوزيع ؛

μ : متوسط التوزيع ؛

$+\infty > x > -\infty$

$+\infty > \mu > -\infty$

$\sigma > 0$

ونكتب بإختصار:

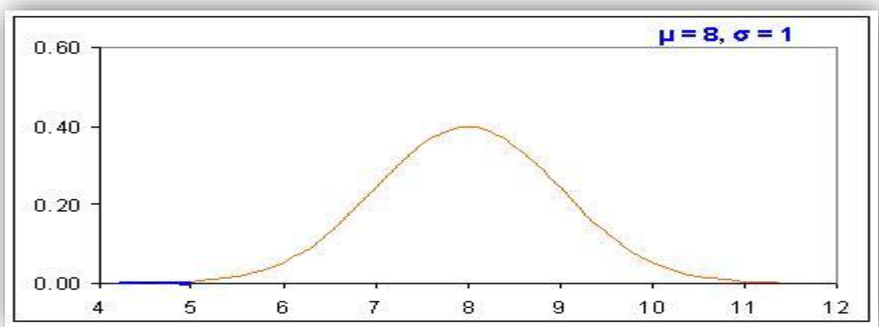
$$\boxed{x \to N(\mu; \sigma^2)}$$

يستخدم التوزيع الطبيعي كثيرا في مجال العينات ويتصف بالخصائص التالية:

- المتغير العشوائي المتصل x يأخذ قيما من $-\infty$ إلى $+\infty$ ؛
- شكل منحنى التوزيع الطبيعي يشبه الجرس؛
- قمة المنحنى تكون عند متوسط المجتمع μ والمنحنى متماثل حول μ ؛
- يعتمد التوزيع الطبيعي على معلمتين هما متوسط المجتمع μ وتباين المجتمع σ^2 .

والشكل رقم (1) يوضح شكل منحنى التوزيع الطبيعي بإفتراض أن متوسطه يساوي 8 وتباينه يساوي 1، كما يلي:

شكل رقم (1): منحنى التوزيع الطبيعي



المصدر: من إعداد الباحثة

1.1. التوزيع الطبيعي المعياري Normal curve:

يعتبر هذا التوزيع كحالة خاصة بالنسبة للقانون الطبيعي العام، حيث نقول أن المتغير العشوائي Z يخضع للتوزيع الطبيعي المعياري إذا كان Z يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي الصفر $(\mu = 0)$ وبتباين يساوي الواحد$(\sigma^2 = 1)$ حيث:

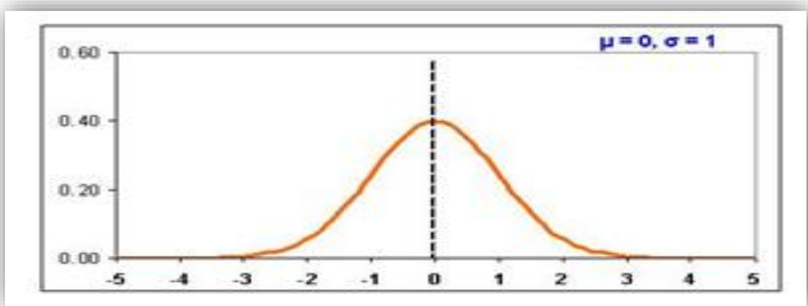
$$-\infty < Z < +\infty$$

وفي هذه الحالة نكتب:

$$\boxed{\boldsymbol{Z \to N(0;1)}}$$

والشكل رقم (2) يوضح شكل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري:

شكل رقم(2): منحنى التوزيع الطبيعي المعياري



المصدر: من إعداد الباحثة

2.1.كيفية حساب الاحتمالات:

إذا كان$x \to N(\mu;\sigma^2)$ فإنه لإيجاد احتمالات المتغير العشوائي الطبيعي يجب استخدام التوزيع الطبيعي المعياري، حيث يتم الانتقال من التوزيع الطبيعي$N(\mu;\sigma^2)$ إلى التوزيع الطبيعي المعياري وفق العلاقة التالية:

$$\boxed{\boldsymbol{Z = \frac{x-\mu}{\sigma}}}$$

حيث يمثل Z المتغير المعياري، أي أن Z يتبع التوزيع الطبيعي المعياري.

كما أن هناك جدول خاص **يسمى جدول التوزيع الطبيعي المعياري** * يستخدم لإيجاد احتمالات المتغير العشوائي الطبيعي المعياري من النوع $p(z \le a)$. مع مراعاة أن جدول التوزيع الطبيعي المعياري مصمم من أجل القيم الموجبة فقط لـ Z ومنه وحسب خاصية التناظر بالنسبة للصفر فإن:

$$\boxed{\boldsymbol{F(-z) = 1 - F(z)}}$$

3.1.تحويل التوزيع الطبيعي إلى توزيع طبيعي معياري وايجاد الاحتمالات:

* أنظر الملحق رقم (1).

لإيجاد احتمالات المتغير العشوائي الطبيعي$\boldsymbol{x \rightarrow N(\mu;\sigma^2)}$ فإننا نحوله أولا إلى متغير عشوائي طبيعي معياري $\boldsymbol{Z \rightarrow N(0;1)}$ ومن ثم نستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري لإيجاد الاحتمالات من النوع:

$$p(z \leq z_1) = \boldsymbol{Q(z_1)} \text{ أو } \boldsymbol{F(z_1)}$$

وذلك باستخدام العلاقة التالية:

$$\boldsymbol{x \rightarrow N(\mu;\sigma^2) \Leftrightarrow Z = \frac{x-\mu}{\sigma} \rightarrow N(0;1)}$$

وبالتالي فإن احتمالات المتغير الطبيعي **x** تحسب وفق العلاقات التالية:

$$* \boldsymbol{p(X \leq x) = p(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}) = p\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = F\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}$$

$$* \boldsymbol{p(X \geq x) = 1 - p(X < x) = 1 - p\left(Z < \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = 1 - F\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}$$

$$* \boldsymbol{p(x_1 \leq X \leq x_2) = p(\frac{x_1-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x_2-\mu}{\sigma}) = p(\frac{x_1-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{x_2-\mu}{\sigma})}$$

$$\boldsymbol{= F\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - F(\frac{x_1-\mu}{\sigma})}$$

مثال:

ليكن x متغير عشوائي يمثل سعة قاروات أحد أنواع معقمات الأيدي والمنتجة من طرف المؤسسات الجزائرية يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره **25** مليلتر وانحراف معياري يقدر بـ **0.8** مليلتر. **والمطلوب**:

1. حدد معالم هذا التوزيع؛
2. ماهي نسبة القارورات التي تتجاوز سعتها **26** مليلتر؛
3. حـــدد نسـبة القارورات التي تتـــراوح سعتـــها ما بين **23.4** و**26.6** مليلتر.

الحل:

1. تتمثل معالم التوزيع الطبيعي في وسطه μ المساوي لـ 25 مليلتر وتباينه σ^2 المساوي لـ 0.8^2 ونكتب:

$$\boldsymbol{x \rightarrow N(25; 0.8^2)}$$

2. حساب نسبة القارورات التي تتجاوز سعتها 26 مليلتر، أي:

$$* \boldsymbol{p(x > 26)} = 1 - p(x \leq 26)$$

$$= 1 - p\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{26-25}{0.8}\right) = 1 - p(Z \leq 1.25) = 1 - F(1.25)$$

من جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن:

$$F(1.25) = 0.8944$$

ومنه:

$$\boldsymbol{p(X > 26)} = 1 - F(1.25) = 1 - 0.8944 = 0.1056 = \boldsymbol{10.56\%}$$

أي أن نسبة القارورات التي تتجاوز سعتها 26 مليلتر هي **10.56%**.

3. حساب نسبة القارورات التي تتراوح سعتها بين 23.4 و26.6 مليلتر، أي:

$$* \boldsymbol{p(23.4 < X < 26.6)} = p\left(\frac{23.4-25}{0.8} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{26.6-25}{0.8}\right) = p(-2 < Z < 2)$$

$$= F(2) - F(-2) = F(2) - 1 + F(2) = 2F(2) - 1$$

من جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن:

$$\mathrm{F}(2) = 0.9772$$

ومنه:

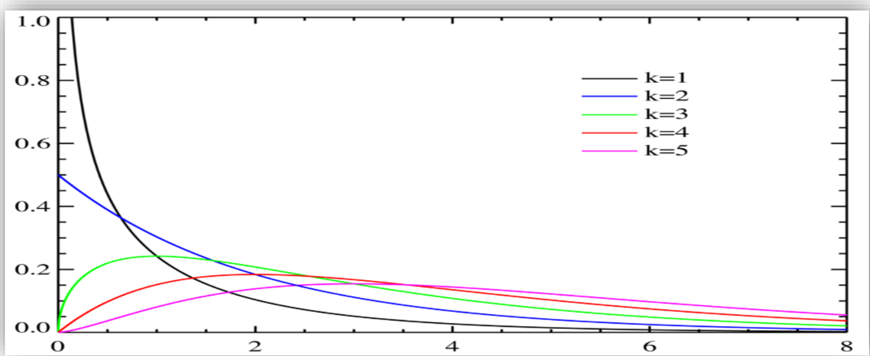
$$\mathbf{p}(\mathbf{23.4} < \boldsymbol{X} < \mathbf{26.6}) = 2F(2) - 1 = 2(0.9772) - 1 = 0.9544 = 95.44\%$$

أي أن نسبة القارورات التي تتراوح سعتها بين 23.4 و26.6 مليلتر هي **95.44%**.

2.توزيع كاي تربيع Chi - Square Distribution:

إن توزيع كاي تربيع توزيعا مستمرا غير متناظر ملتوي نحو اليمين، يأخذ المنحنى التكراري لهذا التوزيع أشكالا مختلفة حسب قيمة درجة الحرية n حيث تمثل n بإختصار **عدد المتغيرات العشوائية التي تدخل في تحديد المتغير الأصلي x**، إذ كلما زادت قيمة n قل الالتواء واقترب بذلك توزيع كاي تربيع من التوزيع الطبيعي، علما أن توزيع كاي تربيع هو توزيع موجب معرف في المجال: $x\epsilon[0;+\infty[$. والشكل رقم (3) يوضح الأشكال التي يأخذها منحنى توزيع كاي تربيع:

شكل رقم(3): أشكال منحنى توزيع كاي تربيع



المصدر: من إعداد الباحثة

1.2. استخدامات توزيع كاي تربيع:

يعتبر هذا التوزيع من التوزيعات الإحتمالية المستمرة التي لها أهمية كبيرة في التطبيقات الإحصائية حيث يستخدم عادة في الاختبارات التالية[1]:

- إختبار تباين مجتمع؛
- إختبار تساوي عدة تباينات؛
- إختبار حسن المطابقة أوجودة التوفيق؛
- إختبار الإستقلالية.

2.2.قراءة واستعمال جدول كاي تربيع:

إن **جدول كاي تربيع** * مصمم خصيصا من أجل تحديد قيم معينة لـ x في مجال تعريفه بدلالة كل من:

- درجة الحرية n؛
- احتمال معلوم p من الشكل: $p(x \leq x_i)$.

تدعى القيم الموجودة داخل هذا الجدول بالقيم الجدولية ويرمز لها بـــ: $K^2_{p;n}$.

مثال: بفرض أن x متغير عشوائي يتبع توزيع كاي تربيع بدرجة حرية **n** تساوي **11** . **والمطلوب**: حدد القيم الجدولية التي تحقق ما يلي:

$$* \, p(x \leq K^2_{p;n}) = 0{,}95$$
$$* \, p(x > K^2_{p,n}) = 0{,}05$$

الحل:

1. بالاعتماد على جدول توزيع كاي مربع وعند درجة حرية قدرها 11 واحتمال قدره 0,95 نجد:

$$* \, p(x \leq K^2_{p,n}) = 0{,}95 \Leftrightarrow K^2_{0{,}95;11} = 19.7$$

بمعنى أن: **احتمال أن تقل قيمة المتغير العشوائي x عن القيمة 19.7 بـ 11 درجات حرية هو 0,95**.

2.

$$* \, p(x > K^2_{p;n}) = 0{,}05 \Leftrightarrow 1 - p(x \leq K^2_{p;n}) = 0{,}05$$
$$\Leftrightarrow p(x \leq K^2_{p;n}) = 1 - 0.05 = 0{,}95$$

وبذلك يكون:

$$K^2_{p;n} = K^2_{0{,}95;11} = 19.7$$

3.توزيع ستيودنت Student Distribution:

---

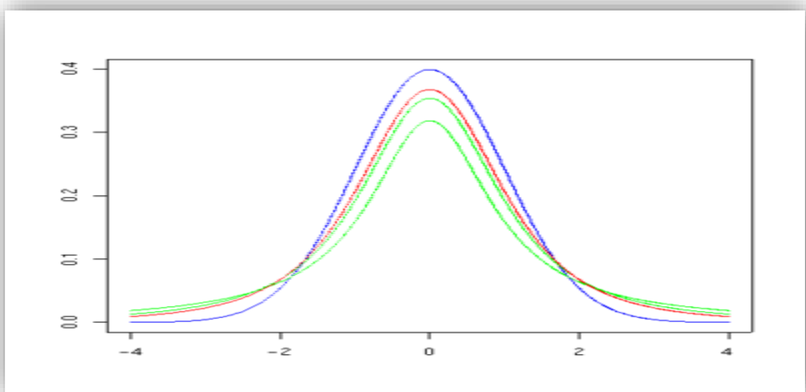
[1] على عبد الزهرة حسن. **االحصاء الحيوي-1**. 2019-2020، ممجموعة محاضرات متوفرة على الموقع:
https://faculty.uobasrah.edu.iq › uploads.

* أنظر الملحق رقم (**2**).

هو توزيع متناظر حول الصفر، أي أنه لكل قيمة موجبة من قيم t هناك نقطة سالبة مناظرة لها، كما تتساوى المساحات تحت المنحنى من اليمين واليسار. وهو يشبه إلى حد كبير التوزيع الطبيعي المعياري إلا أنه أكثر تشتتا منه حيث يقترب شيئا فشيئا من التوزيع الطبيعي كلما زادت قيمة n. وعموما يعتبر الاحصائيون أن المنحنيات تتطابق تقريبا عند ($n \geq 30$).[1]

والشكل رقم (4) يبين أشكال منحنى توزيع ستيودنت عند درجات حرية مختلفة:

شكل رقم (4): أشكال منحنى توزيع ستيودنت



المصدر: من إعداد الباحثة

1.3.قراءة واستعمال جدول ستيودنت:

صمم **جدول توزيع ستيودنت** * خصيصا من أجل قراءة قيم معينة في مجال تعريفه بدلالة معلومتين هما:

- درجة الحرية n ؛
- احتمال معلوم p من الشكل: $p(x \leq x_i)$.

تسمى القيم داخل هذا الجدول **بالقيم الجدولية** وتأخذ الرمز: $\mathbf{t_{p,n}}$.

مثال: ليكن لدينا الاحتمالات التالية للمتغير t الذي يتبع توزيع ستيودنت عند درجات حرية 6، 17، 28 على التوالي، **والمطلوب**: حدد القيم الجدولية المقابلة لها.

$* \, p(T_6 \leq t) = 0{,}55$.
$* \, p(T_{17} \leq t) = 0{,}70$.
$* \, p(T_{28} \leq t) = 0{,}975.$

الحل: بالاعتماد على جدول توزيع ستيودنت نجد:

$* \, p(T_6 \leq t) = 0{,}55 \quad \Leftrightarrow \; t_{0,55;6} = 0{,}131.$

$* \, p(T_{17} \leq t) = 0{,}70 \; \Leftrightarrow \; t_{0,70;17} = 0{,}534.$

[1] جبار عبد مضحي. **مقدمة في نظرية الإحتمالات**. الطبعة الأولى، عمان: دار المسيرة للنشر والتوزيع، 2011، ص.267.
* أنظر الملحق رقم (**3**).

$* p(T_{28} \leq t) = 0{,}975 \ \Leftrightarrow t_{0{,}975;28} = 2.05.$

ملاحظة:

يحتوي جدول توزيع ستيودنت على قيم $\mathbf{t_{p,n}}$ فقط من أجل (**P>0,5**) لذلك فمن أجل بعض الاحتمالات الصغيرة التي لا توجد في الجدول (**P<0,5**) نستخدم خاصية التناظر حسب العلاقة التالية:

$$\boxed{t_{1-p} = -t_p}$$

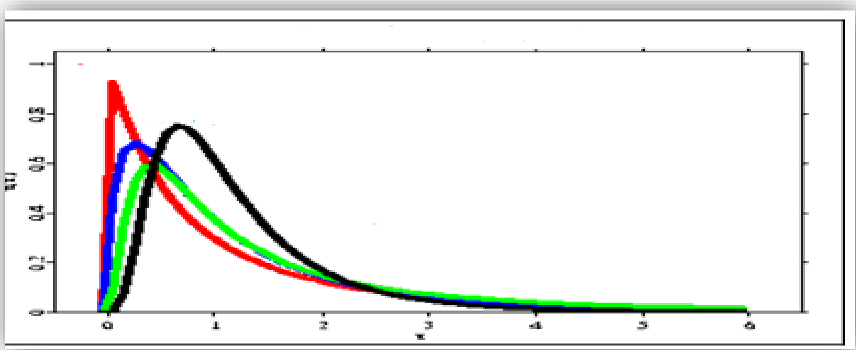
مثال:

$$t_{0{,}20;18} = -\, t_{1-0.20\,;\,18} = -\, t_{0{,}80;18} = -\,0{,}862$$

4.توزيع فيشر Fisher Distribution :

يعتبر توزيع فيشر توزيعا مستمرا غير متناظر ملتوي قليلا نحو اليمين، يتحدد شكله حسب قيم درجات الحرية n_1 وn_2، حيث كلما إزدادت هذه القيم كلما اقترب توزيع فيشر من التوزيع الطبيعي، كما أنه توزيع موجب أي أنه معرف في المجال: $x\epsilon[0; +\infty[$.

الشكل رقم (5): أشكال منحنى توزيع فيشر



المصدر: من إعداد الباحثة

1.4.قراءة واستعمال جدول فيشر:

إن **جدول فيشر** ** قد أعد خصيصا من أجل تحديد قيم معينة لـ F في مجال تعريفه بدلالة ثلاثة معالم هي:

- درجة الحرية n_1؛
- درجة الحرية n_2؛
- إحتمال معلوم p معبر عنه بـ $p(F \leq F_{p;n_1;n_2})$.

تسمى القيم الموجودة داخل الجدول **بالقيم الجدولية** ونرمز لها بالرمز:

$$F_{p;n_1;n_2}$$

في الغالب تعطي الجداول الإحصائية قيم F عند $p = 0{,}95$ و $p = 0{,}99$ فقط.

** أنظر الملحق رقم (4).

مثال:

أوجد القيم التالية:

$$F_{0,99;20;7};\ F_{0,95;4;13}$$

الحل:

1. بالاعتماد على جدول توزيع فيشر وعند احتمال قدره 0.95 ودرجتي حرية 4 و13 على التوالي نجد:

$$* F_{0,95;4,13} = \mathbf{3,18}$$

بمعنى أن:

$$\boldsymbol{p(F_{4;13} \leq 3,18) = 0,95}$$

2. باستخدام جدول توزيع فيشر وعند احتمال قدره 0.99 ودرجتي حرية 20 و7 على التوالي نجد:

$$* F_{0,99;20,7} = \mathbf{6,16}$$

وهذا يعني أيضا:

$$\boldsymbol{p(F_{20;7} \leq 6,16) = 0,99}$$

ملاحظة:

من أجل الإحتمالات الصغيرة التي لا توجد في جدول توزيع فيشر، فإنه ولإيجاد القيم الجدولية المقابلة لها نستخدم العلاقة التالية:

$$\boxed{\boldsymbol{F_{p;n_1;n_2} = \frac{1}{F_{1-p;n_2;n_1}}}}$$

مثال: حدد القيمة الجدولية للمتغير **F** عند احتمال قدره **0.01** ودرجتي حرية قدرها **10**و**120** على التوالي:

الحل: بتطبيق العلاقة السابقة وباستخدام جدول توزيع فيشر الخاص بالاحتمال المقدر بـ **0.99** نجد:

$$* F_{0,01;10;120} = \frac{1}{F_{1-0,01;120;10}} = \frac{1}{F_{0,99;120;10}} = \frac{1}{4,00} = \mathbf{0,25}$$

سادسا: تمارين مقترحة حول المحور الأول

التمرين1:

بغرض المساهمة في حماية الأطقم الطبية والشبه طبية من فيروس كورونا في الجزائر، تبنت العديد من المؤسسات المصغرة صناعة المآزر الطبية ذات الاستخدام الواحد **disposable medical aprons** والتي تنقسم إلى ثلاثة أنواع حسب نوع المادة الأولية المستعملة في إنتاجها. حيث تطلبت عملية الرقابة على جودة إنتاج أحد هذه المؤسسات اختيار عينة بنسبة 30% من الانتاج الاجمالي لها وكان التوزيع كما يلي: 40 ألف مئزر من النوع أ، 35 ألف مئزر من النوع ب و25 ألف مئزر من النوع ج. **والمطلوب**: حدد حجوم العينات المطلوب اختيارها.

التمرين2:

بغرض المساهمة في التخفيف من معاناة أطفال القمر، قامت مديرة مدرسة "إلرام زياني" الخاصة بحملة لجمع السدادات البلاستيكية وبيعها لإعادة تدويرها وهذا بكافة بلديات ولاية ميلة البالغ عددها 32 بلدية. وبعد خمسة أشهر من انطلاق الحملة تريد السيدة زياني أخذ عينة منتظمة من 8 بلديات وذلك للوقوف على وزن السدادات المجمعة بها. إذا علمت أن b=3، **فالمطلوب:** حدد عناصر هذه العينة المنتظمة موضحا كل الخطوات اللازمة لذلك بالتفصيل.

التمرين3:

بعد الهزات الأرضية المتتالية التي مست ولاية ميلة في صيف 2020 قامت الجهات المعنية بزيارة تفقدية للأحياء المتضررة من هذا الزلزال قصد الوقوف على ما خلفه من أضرار واتخاذ التدابير اللازمة لمعالجة الوضع، حيث تمت معاينة 36 مسكن فقط بهذه الأحياء فتبين أن 9 منها كانت فعلا متضررة وتتطلب الترميم لتكون صالحة للسكن. **والمطلوب:**

1- ما هي نسبة المساكن التي تتطلب الترميم من بين المساكن التي تمت معاينتها؟

2– إذا اعتبرنا أن عدد المساكن التي تتطلب الترميم في هذه الأحياء المتضررة متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره 2 وانحراف معياري قدره 3.2، فما هي معالم هذا التوزيع وما احتمال أن يكون عدد المساكن التي تتطلب الترميم في الأحياء المتضررة يتراوح مابين 6 و10 مساكن؟

التمرين 4:

ليكن χ متغير عشوائي يتبع قانون كاي تربيع، **والمطلوب:**

1. إذا كانت n=9 أحسب الاحتمالات التالية:

$* p(\chi > 7.5)$
$* p(\chi < 21.7)$

2. إذا كانت n=8 أحسب الاحتمال التالي:

$* p(3.49 < \chi < 5.07)$

3. أوجد القيمة الجدولية $\chi^2_{p,n}$ التي تحقق الاحتمالات التالية وذلك عند n=50 :

$* p\left(\chi > \chi^2_{p,n}\right) = 0.05$
$* p\left(\chi < \chi^2_{p,n}\right) = 0.95$

التمرين 5:

ليكن لدينا المتغير العشوائي T يتبع توزيع ستيودنت بدرجة حرية n، و**المطلوب:**

1. أوجد قيمة t التي تحقق:

$* p(T < t) = 0.9$

حيث n يساوي: 10، 20، 120 على الترتيب.

2. أوجد القيمة الجدولية t التي تحقق:

* $p(\mathrm{T} > \mathrm{t}) = 0.05$
* $p(\mathrm{T} < \mathrm{t}) = 0.01$
* $p(\mathrm{T} < \mathrm{t}) = 0.025$

حيث n تساوي: 7، 8، 10 على التوالي.

3. أحسب الاحتمالات التالية:

* $p(\mathrm{T} < 1.37)$
* $p(\mathrm{T} < 2.90)$
* $p(\mathrm{T} < 4.03)$
* $p(\mathrm{T} < 0.765)$

وذلك عند درجات حرية n يساوي: 10، 8، 5، 10 على الترتيب.

4. بفرض أن المتغير T يتبع توزيع فيشر أي: $T \to F_{P;\, n_1;n_2}$، حدد القيم الجدولية التالية:

* $F_{0.95;\,2;15}$ * $F_{0.99;\,30;10}$ * $F_{0.99;\,12;9}$ * $F_{0.05;\,12;10}$

سابعا: حل التمارين المقترحة حول المحور الأول

حل التمرين1:

بما أن المجتمع هنا غير متجانس فإن العينة المختارة هنا هي **عينة طبقية**، وعليه نقوم أولا بحساب حجم العينة n حيث:

$$n = 0.3 \times (40.000 + 35.000 + 25.000) = 0.3 \times (100.000) = 30.000$$

علما أن:

$$n = n_1 + n_2 + n_3$$

حيث: n_1 هو حجم العينة الذي ينبغي سحبه من الطبقة الأولى أي من مجموع المآزر من النوع أ، وn_2 هو حجم العينة الذي ينبغي سحبه من الطبقة الثانية أي من مجموع المآزر من النوع ب، وn_3 هو حجم العينة الذي ينبغي سحبه من الطبقة الثالثة أي من مجموع المآزر من النوع ج، والتي تُكوِن في مجموعها العينة **الطبقية** المطلوب سحبها من هذا المجتمع. حيث أن عملية السحب هذه تكون حسب وزن كل طبقة في المجتمع كما يلي:

$$n_1 = 30.000 \times \frac{40.000}{100.000} = 12.000$$

$$n_2 = 30.000 \times \frac{35.000}{100.000} = 10.500$$

$$n_3 = 30.000 \times \frac{25.000}{100.000} = 75.00$$

حل التمرين2:

لتشكيل عينة منتظمة من 8 بلديات من مجتمع حجمه 32 بلدية نتبع الخطوات التالية:

1.نحسب الأساس r حيث:

$$r = \frac{N}{n} = \frac{32}{8} = 4$$

2.نقسم المجتمع إلى مجموعات متساوية في كل منها 4 عناصر (بلديات) ثم نرقم عناصر المجموعة الاولى من 1 إلى 4 والمجموعة الثانية من 5 إلى 8 وهكذا حتى المجموعة الأخيرة من 29 إلى 32.

3. نختار عنصر b بطريقة عشوائية من المجموعة الأولى وهنا تم تحديده بـ 3 أي أن **العنصر الأول** في هذه العينة هو البلدية التي تحمل الرقم 3.

4. بناءا على العنصر b يتحدد باقي عناصر العينة تلقائيا، حيث تمثل أرقام هذه العناصر حدود متتالية حسابية حدها الأول b وأساسها r وذلك كما يلي:

العنصر الثاني هو البلدية التي تحمل الرقم $b + r$ أي:

$$b + r = 3 + 4 = 7$$

أي البلدية التي تحمل الرقم 7.

العنصر الثالث هو البلدية التي تحمل الرقم $b + 2r$ أي:

$$b + 2r = 3 + 2 \times 4 = 11$$

أي البلدية التي تحمل الرقم 11.

العنصر الرابع هو البلدية التي تحمل الرقم $b + 3r$ أي:

$$b + 3r = 3 + 3 \times 4 = 15$$

أي البلدية التي تحمل الرقم 15.

العنصر الخامس هو البلدية التي تحمل الرقم $b + 4r$ أي:

$$b + 4r = 3 + 4 \times 4 = 19$$

أي البلدية التي تحمل الرقم 19.

العنصر السادس هو البلدية التي تحمل الرقم $b + 5r$ أي:

$$b + 5 \times r = 3 + 5 \times 4 = 23$$

أي البلدية التي تحمل الرقم 23.

العنصر السابع هو البلدية التي تحمل الرقم $b + 6r$ أي:

$$b + 6r = 3 + 6 \times 4 = 27$$

أي البلدية التي تحمل الرقم 27.

العنصر الثامن هو البلدية التي تحمل الرقم $b + 7r$ أي:

$$b + 7r = 3 + 7 \times 4 = 31$$

أي البلدية التي تحمل الرقم 31.

وبذلك فإن عناصر هذه العينة المنتظمة هي البلديات التي تحمل الأرقام التالية:

$$\{3; 7; 11; 15; 19; 23; 27; 31\}$$

حل التمرين3:

1. حساب نسبة المساكن التي تتطلب الترميم من بين المساكن التي تمت معاينتها:

لدينا: عدد المساكن التي تمت معاينتها هو 36 مسكن، وعدد المساكن المتضررة فعلا وتتطلب الترميم هو 9 مساكن من بين 36 مسكن وبذلك فإن النسبة المطلوبة ولتكن f هي:

$$\boldsymbol{f} = \frac{\text{عدد المساكن المتضررة}}{\text{المساكن التي تمت معاينتها}} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{36}} = \mathbf{0.25 = 25\%}$$

2. تتمثل معالم التوزيع الطبيعي في وسطه μ المساوي لـ 2 وتباينه σ^2 المساوي لـ 3.2^2 ونكتب:

$$\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{N}(\mathbf{2}; \mathbf{3.2^2})$$

3. حساب احتمال أن يكون عدد المساكن التي تتطلب الترميم في الأحياء المتضررة يتراوح مابين 6 و10 مساكن أي:

$$* \ \mathbf{p}(\mathbf{6} < \boldsymbol{X} < \mathbf{10}) = \mathrm{p}\left(\frac{6-2}{3.2} < \frac{\mathrm{X}-\mu}{\sigma} < \frac{10-2}{3.2}\right) = \mathrm{p}(1.25 < Z < 2.5)$$
$$= F(2.5) - F(1.25)$$

من جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن:

$$\mathrm{F}(1.25) = \mathbf{0.8944} \quad \text{و} \quad \mathrm{F}(2.5) = \mathbf{0.9938}$$

ومنه:

$$\mathbf{p}(\mathbf{6} < \boldsymbol{X} < \mathbf{10}) = F(2.5) - F(1.25) = 0.9938 - 0.8944 = \mathbf{0.0994}$$

أي أن احتمال أن يكون عدد المساكن التي تتطلب الترميم في الأحياء المتضررة يتراوح مابين 6 و10 مساكن هو **0.0994**.

حل التمرين4:

1. حساب الاحتمالات التالية إذا كانت n=9:

$* \, \boldsymbol{p(\chi < 21.7) = ?}$

باستخدام جدول توزيع كاي تربيع بالقراءة في سطر درجة الحرية التي قدرها $n = 9$ وعند القيمة الجدولية 21.7 نجد أن الاحتمال المقابل لها هو 0.99، ونكتب:

$$p(\chi < 21.7) = \mathbf{0.99}$$

$* \, \boldsymbol{p(x > 7.5) = ?}$

بتطبيق قواعد الاحتمالات نجد:

$$\boldsymbol{p(x > 7.5) = 1 - p(x < 7.5)}$$

وبالنظر إلى جدول توزيع كاي تربيع دائما نجد أنه في السطر الخاص بنفس درجة الحرية السابقة 9 القيمة 7.5 غير موجودة وإنما هي محصورة بين القيمتين المتتاليتين 5.9 و8.34 والمقابلتين للاحتمالين 0.25 و0.5 على التوالي ومنه نستنتج مبدئيا أن الاحتمال المطلوب هنا وليكن p_0 محصور بين 0.25 و0.5 . ويمكن ايجاده بطريقة الحصر كما يلي: (**المقصود هنا هو** $\boldsymbol{p(x < 7.5)}$ فقط)

$$0.25 \rightarrow 5.9$$
$$p_0 \rightarrow 7.5$$
$$0.5 \rightarrow 8.34$$

ومنه:

$$(0.5 - 0.25) \rightarrow (8.34 - 5.9)$$
$$(p_0 - 0.25) \rightarrow (7.5 - 5.9)$$

أي:

$$\boldsymbol{p_0 - 0.25 = \frac{(0.5-0.25)(7.5-5.9)}{(8.34-5.9)}}$$

وبذلك يكون:

$$p_0 = \frac{0.4}{2.44} + 0.25 = \mathbf{0.4139}$$

وبالرجوع إلى المطلوب نجد:

$$p(x > 7.5) = 1 - p(x < 7.5) = 1 - 0.4139 = \mathbf{0.5861}$$

2. حساب الاحتمال التالي إذا كانت n=8:

$* \, \boldsymbol{p(3.49 < \chi < 5.07) = ?}$

لدينا:

$$p(3.49 < X < 5.07) = p(x < 5.07) - p(x < 3.49)$$

وهذا حسب قواعد الاحتمالات، وبالنظر إلى جدول توزيع كاي تربيع في سطر درجة الحرية المقدرة بـ 8 نجد أن الاحتمال المقابل للقيمة الجدولية 5.07 هو 0.25 والاحتمال المقابل للقيمة الجدولية 3.49 هو 0.10 ومنه:

$$p\ (3.49 < X < 5.07) = p(x < 5.07) - p(x < 3.49) = 0.25 - 0.10 = 0.15$$

أي:

$$p(3.49 < X < 5.07) = \mathbf{0.15}$$

3. إيجاد القيمة الجدولية $\chi^2_{p,n}$ التي تحقق الاحتمالات التالية، وذلك عند n=50 :

$$* \, p\left(\chi < \boldsymbol{\chi^2_{p,n}}\right) = 0.95$$

أي:

$$\boldsymbol{X^2_{0.95;50}} \quad \mathbf{= ?}$$

بالقراءة في جدول توزيع كاي تربيع عند درجة حرية قدرها 50 واحتمال قدره 0.95 نجد أن القيمة الجدولية الموافقة لهذه القيم هي: 67.5، أي:

$$X^2_{0.95;50} \quad = \mathbf{67.5}$$

$$* \, p\left(\chi > \boldsymbol{\chi^2_{p,n}}\right) = 0.05$$

أي:

$$\boldsymbol{X^2_{0.05;50}} \quad \mathbf{= ?}$$

تطبيقا لقواعد الاحتمالات دائما نجد أن:

$$p\left(\chi > \boldsymbol{\chi^2_{p,n}}\right) = 0.05 \Leftrightarrow 1 - p\left(x < \chi^2_{p,n}\right) = 0.05$$
$$\Leftrightarrow p\left(x < \chi^2_{p,n}\right) = 1 - 0.05 = 0.95$$

وهنا نلاحظ أننا تحصلنا على نفس الحالة السابقة وبذلك تكون القيمة الجدولية الموافقة لهذا الاحتمال عند درجة حرية قدرها 50 هي أيضا 67.5.

حل التمرين5:

1. إيجاد قيمة t التي تحقق:

$$* \, \boldsymbol{p}\left(\mathbf{T} < \mathbf{t}_{\boldsymbol{p;n}}\right) = \mathbf{0.9}$$

عند n=10:

$$t_{0.9;10} = ?$$

بالنظر إلى جدول توزيع ستيودنت عند درجة حرية قدرها 10 واحتمال قدره 0.9 نجد أن القيمة الجدولية المقابلة لهذه القيم هي 1.37، أي:

$$\boldsymbol{t_{0.9;10}} = \mathbf{1.37}$$

عند n=20:

$$t_{0.9;20} = ?$$

بالنظر إلى جدول توزيع ستيودنت عند درجة حرية قدرها 20 واحتمال قدره 0.9 نجد أن القيمة الجدولية المقابلة لهذه القيم هي 1.32، أي:

$$\boldsymbol{t_{0.9;20} = 1.32}$$

عند n=120:

$$t_{0.9;120} =?$$

بالنظر إلى جدول توزيع ستيودنت عند درجة حرية قدرها 120 واحتمال قدره 0.9 نجد أن القيمة الجدولية المقابلة لهذه القيم هي **1.29**، أي:

$$\boldsymbol{t_{0.9;120} = 1.29}$$

2. إيجاد القيمة الجدولية t عند n تساوي: 7، 8، 10 على التوالي، والتي تحقق:

$* \boldsymbol{p(T > t) = 0.05}$

$p(T > t) = 0.05 \Leftrightarrow 1 - p(T < t) = 0.05 \Rightarrow p(T < t) = 1 - 0.05 = 0.95$

أي أن المطلوب هنا هو:

$$t_{0.95;n} =?$$

عند n=7 :

$$t_{0.95;7} =?$$

من جدول توزيع ستيودنت وعند درجة حرية قدرها 7 واحتمال قدره 0.95 نجد أن القيمة الجدولية المقابلة لهذه القيم هي: 1.90 أي:

$$t_{0.95;7} = 1.90$$

عند n=8 :

$$t_{0.95;8} =?$$

من جدول توزيع ستيودنت وعند درجة حرية قدرها 8 واحتمال قدره 0.95 نجد أن القيمة الجدولية المقابلة لهذه القيم هي: 1.86 أي:

$$t_{0.95;8} = 1.86$$

عند n=10 :

$$t_{0.95;10} =?$$

من جدول توزيع ستيودنت وعند درجة حرية قدرها 10 واحتمال قدره 0.95 نجد أن القيمة الجدولية المقابلة لهذه القيم هي: 1.81، أي:

$$t_{0.95;7} = 1.81$$

$* \boldsymbol{p(T < t_{p;n}) = 0.01}$

نلاحظ هنا أن الاحتمال المقدر بـ 0.01 غير موجود في جدول توزيع ستيودنت (أقل من 0.5) ونعلم أن توزيع ستيودنت متناظر بالنسبة للصفر وعليه فإن القيمة الجدولية في هذه الحالة تكون سالبة وتستخرج بتطبيق خاصية التناظر كما يلي:

$$t_{p;\,n} = -t_{1-p;\,n}$$

أي:

عند n=7 :

$$t_{0.01;\,7} = -t_{1-0.01;\,7} = -t_{0.99;\,7} = \mathbf{-3}$$

عند n=8 :

$$t_{0.01;\,8} = -t_{1-0.01;\,8} = -t_{0.99;\,8} = \mathbf{-2.90}$$

عند n=10 :

$$t_{0.01;\,10} = -t_{1-0.01;\,10} = -t_{0.99;\,10} = \mathbf{-2.76}$$

$* \boldsymbol{p(T < t_{p;\,n}) = 0.025}$

هنا أيضا نستخدم خاصية التناظر لاستخراج القيم الجدولية المقابلة للاحتمال 0.025 لنفس الأسباب السابقة.

عند n=7 :

$$t_{0.025;7} = -t_{1-0.025;7} = -t_{0.975;7} = \mathbf{-2.36}$$

عند n=8 :

$$t_{0.025;8} = -t_{1-0.025;8} = -t_{0.975;8} = \mathbf{-2.31}$$

عند n=10 :

$$t_{0.025;10} = -t_{1-0.025;10} = -t_{0.975;10} = \mathbf{-2.28}$$

3.حساب الاحتمالات التالية:

$* \boldsymbol{p(T < 4.03)} = ?$

عند n=5:

نبحث في جدول توزيع ستيودت عند درجة حرية قدرها 5 عن القيمة الجدولية 4.03 نجد أنها تقابل الاحتمال المقدر بـ 0.995، ومنه:

$$p(T < 4.03) = \mathbf{0.995}$$

$* \boldsymbol{p(T < 2.90)} = ?$

عند n=8:

نبحث في جدول توزيع ستيودت عند درجة حرية قدرها 8 عن القيمة الجدولية 2.90 نجد أنها تقابل الاحتمال المقدر بـ 0.99، ومنه:

$$p(T < 2.90) = \mathbf{0.99}$$

$* \boldsymbol{p(T < 1.37)} = ?$

عند n=10:

نبحث في جدول توزيع ستيودت عند درجة حرية قدرها 10 عن القيمة الجدولية 1.37 نجد أنها تقابل الاحتمال المقدر بـ 0.90، ومنه:

$$p(T < 1.37) = \mathbf{0.90}$$

$* \boldsymbol{p(T < 0.765)} = ?$

عند n=10:

نبحث في جدول توزيع ستيودت عند درجة حرية قدرها 10 عن القيمة الجدولية 0.765 نجد أنها محصورة بين القيمتين 0.7 و0.879 والمقابلة للاحتماليين 0.75 و0.8 على التوالي وعليه فإن الاحتمال المقابل لها محصور بين القيمتين 0.75 و0.8 والذي يستخرج بطريقة الحصر كما يلي:

$$\begin{gathered} 0.75 \rightarrow 0.7 \\ p_0 \rightarrow 0.765 \\ 0.8 \rightarrow 0.879 \end{gathered}$$

ومنه:

$$\begin{gathered} (0.8 - 0.75) \rightarrow (0.879 - 0.7) \\ (p_0 - 0.75) \rightarrow (0.765 - 0.7) \end{gathered}$$

أي:

$$p_0 - 0.75 = \frac{(0.8 - 0.75)(0.765 - 0.7)}{(0.879 - 0.7)}$$

وبذلك يكون:

$$p_0 = \frac{0.00325}{0.179} + 0.75 = \mathbf{0.7682}$$

4. تحديد القيم الجدولية التالية:

$* \boldsymbol{F_{0.05;12;10}} = ?$

بما أن الاحتمال هنا هو 0.05 غير موجود في جدول توزيع فيشر نستخدم العلاقة التالية:

$$* F_{0.05;12;10} = \frac{1}{F_{1-0.05;10;12}} = \frac{1}{2.75} = \mathbf{0.36}$$

باستخدام جداول توزيع فيشر الخاص نجد:

$* F_{0.99;12;9} = \mathbf{5.11}$

$* F_{0.99;30;10} = \mathbf{4.25}$

$* F_{0.95;2;15} = \mathbf{3.68}$

المحور الثاني:

توزيع المعاينة وكيفية بناء مجالات الثقة

أولا: توزيع المعاينة Sampling distribution

غالبا ماتكون معالم المجتمع مجهولة حيث يتم تقديرها من بيانات العينة، وبما أنه يمكن سحب أكثر من عينة من نفس المجتمع فإن قيمة المقدر المحسوبة من بيانات العينة تكون عبارة عن متغير، ومادام السحب يتم عشوائيا فإن هذا المقدر هو متغير عشوائي أيضا والذي يمكن أن يكون له توزيع إحتمالي يسمى توزيع المعاينة. وهو التوزيع الاحتمالي لأي مقدر نحسب قيمته من كل العينات العشوائية ذات الحجم المتساوي والممكن سحبها من هذا المجتمع.[1]

1.توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينة $\overline{x}$:

يعتمد شكل ومعالم توزيع المعاينة على طبيعة المجتمع وحجمه وعلى طريقة سحب العينات هل هي بإرجاع أو بدون إرجاع. هذا من جهة ومن جهة أخرى نجد أنه في معظم البحوث الإحصائية يكون حجم المجتمع مجهول بمعنى مجتمع غير محدود، بالإضافة إلى أن حجم العينة يكون صغير جدا أمام حجم المجتمع أي أن حجم العينة يمثل أقل من 10 % من حجم المجتمع $\frac{n}{N} \leq 0.1$ وكما هو معلوم أنه إذا كان السحب بدون إرجاع ففي الحالتين يهمل معامل الإرجاع المعبر عنه بـ: $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ وعليه سنكتفي بدراسة حالة **السحب مع الإرجاع** فقط.

1.1.إذا كان حجم العينة كبير $n \geq 30$:

في هذه الحالة فإنه بغض النظر عن توزيع المجتمع فإن $\overline{x}$ يتبع تقريبا التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره $E(\bar{x})$ وتباين قدره $v(\bar{x})$ أو $\sigma_{\bar{x}}^2$ أي[2]:

$$\boxed{\overline{x} \rightarrow N\big(E(\overline{x}); v(\overline{x})\big)}$$

وبذلك يكون:

$$\boxed{Z = \frac{\overline{x} - E(\overline{x})}{\sqrt{v(\overline{x})}} \rightarrow N(0; 1)}$$

حيث:

1.1.1.إذا كان σ^2 معلوم فإن:

$$E(\overline{x}) = \mu$$
$$v(\overline{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

2.1.1.إذا كان σ^2 مجهول فإن:

$$E(\overline{x}) = \mu$$

---

[1] محمود الدريني .**محاضرات في الاحصاء الاستدلالي**. ص.5.

[2] نافذ محمد بركات .**توزيع المعاينة**. الجامعة الاسلامية غزة، ص. 3-5. متفرقة.

$$\boldsymbol{v(\bar{x}) = \frac{s^2}{n-1}}$$

نلاحظ أنه في هذه الحالة يتم الإعتماد على تباين العينة الذي يعطى بالعلاقة التالية:

$$\boxed{\boldsymbol{s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{i=n}(x_i - \bar{x})^2}{n}}}$$

وذلك نظرا لأن تباين المجتمع مجهول لذلك يتم تعويضه بتباين العينة.

مثال:

بغرض الرقابة على الانتاج الحقيقي للعسل في احدى المستثمرات لتربية النحل بمنطقة سطيف تكلفت وزارة التجارة بدراسة الموضوع من كل جوانبه، حيث في احدى الخطوات تم أخذ عينة من الصناديق حجمها 126 صندوق من هذه المستثمرة، فتبين أن متوسط وزن العسل الذي ينتجه الصندوق الواحد في هذه العينة هو 25 كلغ بانحراف معياري قدره 5 كلغ. **والمطلوب:**

1. ماهو القانون الاحتمالي لـ $\bar{x}$ ؟

2. بفرض أن متوسط المجتمع $\boldsymbol{\mu = 35}$ أحسب احتمال أن لا يتجاوز متوسط وزن العسل الذي ينتجه الصندوق الواحد في هذه العينة 36 كلغ.

الحل:

1.تحديد القانون الاحتمالي لـ $\bar{x}$:

لدينا:

$$n = 126 \geq 30 \quad ؛ \quad \bar{x} = 25 \quad ؛ \quad s = 5$$

بما أن حجم العينة $n = 126 \geq 30$ فإن $\bar{x}$ يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره $E(\bar{x})$ وتباين قدره $v(\bar{x})$، أي:

$$\boldsymbol{\bar{x} \to N\big(E(\bar{x}); v(\bar{x})\big)}$$

2. حساب احتمال أن لا يتجاوز متوسط وزن العسل الذي ينتجه الصندوق الواحد في هذه العينة 36 كلغ أي:

$$\boldsymbol{p(\bar{x} \leq 36) = ?}$$

لدينا: $\boldsymbol{\mu = 35}$ و $\boldsymbol{\sigma^2}$ مجهول وعليه فإن: $\boldsymbol{E(\bar{x}) = \mu = 35}$ و $\boldsymbol{v(\bar{x}) = \frac{s^2}{n-1} = \frac{5^2}{126-1} = 0.2}$ وبذلك يكون:

$$\boldsymbol{p(\bar{x} \leq 36)} = p\left(\frac{\bar{x} - E(\bar{x})}{\sqrt{v(\bar{x})}} \leq \frac{36 - 35}{\sqrt{0.2}}\right) = p\left(Z \leq \frac{1}{0.45}\right) = p(Z \leq 2.22) = F(2.22)$$

وبالنظر إلى جدول التوزيع الطبيعي نجد أن:

$$F(2.22) = 0.9866$$

ومنه:

$$p(\bar{x} \leq 36) = \mathbf{0.9866}$$

2.1.إذا كان حجم العينة صغير $n \geq 30$:

إذا كان المجتمع الذي سحبت منه العينات العشوائية ذات الحجم n حيث n أقل من 30 يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وتباين مجهول وكان السحب مع الارجاع أو بدون إرجاع من مجتمع غير محدود في هذه الحالة يصبح لدينا المتغير T حيث:

$$\boxed{T = \frac{\bar{x} - E(\bar{x})}{\sqrt{\frac{s^2}{n-1}}} \rightarrow t_{n-1}}$$

بمعنى أن المتغير T في هذه الحالة يتبع توزيع ستيودنت بدرجة حرية قدرها $n-1$.

ملاحظة:

نعلم أنه إذا كان حجم العينة كبير فإن توزيع ستيودنت يقترب من التوزيع الطبيعي لذلك فإن استخدام توزيع ستيودنت يقتصر في الغالب على حالة العينات الصغيرة إذا كان تباين المجتمع σ^2 مجهول فقط.

2.توزيع المعاينة لنسبة العينة f:

إذا كان إهتمامنا منصبا على نسبة صفة أو خاصية معينة في المجتمع حيث تعبر لنا هذه النسبة عن احتمال النجاح p كنسبة الأمية في الجزائر، نسبة الذكور في الجامعة، نسبة الانتاج التالف في انتاج آلة معينة وغيرها، وتم سحب عينات ذات حجم n من هذا المجتمع وقمنا بحساب نسبة هذه الصفة في كل عينة سنجد أن f تتغير من عينة غلى أخرى وبالتالي فهي متغير عشوائي له توزيع إحتمالي يطلق عليه اسم توزيع المعاينة للنسبة.

1.2.إذا كان حجم العينة كبير $n \geq 30$:

من أجل القيم الكبيرة لـ n فإن f تتبع تقريبا التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره:

$$E(f) = p$$

وتباين قدره:

$$v(f) = \frac{pq}{n}$$

ونكتب:

$$\boxed{f \rightarrow N(E(f), V(f))}$$

حيث:

$$\boxed{Z = \frac{f - E(f)}{\sqrt{V(f)}} \rightarrow N(0;1)}$$

ملاحظة:

حتى يكون التقريب جيد بين التوزيع الثنائي والطبيعي من الأفضل أن يكون جداء كل من $\boldsymbol{np}$ و $\boldsymbol{np}$ أكبر من 5.

مثال:

إذا كانت نسبة الأمية في أحد المجتمعات هي 3 وتم أخذ عينة من 400 شخص من هذا المجتمع.

والمطلوب: ما حتمال أن نجد من بينهم 20 شخص على الأقل أميين؟

الحل:

لدينا $\boldsymbol{x}$ متغير عشوائي يمثل عدد الأميين ضمن عينة من 400 شخص، و $\boldsymbol{f}$ متغير عشوائي يمثل نسبة الأميين ضمن عينة من 400 شخص، حيث:

$$\boldsymbol{f} = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{n}} = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{400}}$$

وبما أن:

$$5 < \begin{cases} n.p = 12 \\ n.q = 388 \end{cases} \quad \text{و} \quad n = 400 \geq 30$$

فإن:

$$\boldsymbol{f} \rightarrow \boldsymbol{N}(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{f}), \boldsymbol{V}(\boldsymbol{f}))$$

حيث:

$$E(f) = p = \mathbf{0.03}$$

$$\boldsymbol{v}(f) = \frac{pq}{n} = \frac{0,03.0,97}{400} = \mathbf{0.00007275}$$

وبذلك يكون:

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x} \geq \mathbf{20}) = p\left(\frac{x}{400} \geq \frac{20}{400}\right) = p(f \geq 0.05) = p\left(\frac{f - E(f)}{\sqrt{v(f)}} \geq \frac{0.05 - 0.03}{\sqrt{0.00007275}}\right)$$
$$= p(z \geq 2.35) = 1 - p(z < 2.35) = 1 - F(2.35) = 1 - \mathbf{0.9906} = \mathbf{0.0094}$$

ملاحظة: عندما نكون بصدد تقدير النسبة لابد أن يكون حجم العينة كبير، وإذا كان المجتمع لا يتوزع طبيعيا هنا لابد من أخذ عينة كبيرة.

3.توزيع المعاينة للتباين $\boldsymbol{s^2}$:

نعلم أنه إذا قمنا بسحب عينة من $\boldsymbol{n}$ عنصر من مجتمع ما فإن تباين العينة يعطى بالعلاقة:

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

ولدينا النظرية التالية:

إذا تم سحب عينات عشوائية حجمها n من مجتمع غير محدود تباينه σ^2 **فإن** $E(s^2)$ **يعطى بالعلاقة:**

$$E(s^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

وبما أن $E(s^2) \neq \sigma^2$ مما يدل على أن s^2 مقدر متحيز لتباين المجتمع σ^2 لهذا السبب فإن الكثير من الاحصائيين يستخدمون بدل تباين العينة s^2 إحصائية اخرى تسمى **تباين العينة المعدل** والذي يعطى بالعلاقة التالية:

$$\hat{s}^2 = \frac{n}{n-1}s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

وهو مقدر غير متحيز لتباين المجتمع لأن:

$$E(\hat{s}^2) = \sigma^2$$

وفي هذا السياق لدينا **النظرية التالية:**

إذا تم سحب عينات عشوائية حجمها n عنصر من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وانحراف معياري σ فإن المتغير العشوائي المعطى بالعلاقة التالية:

$$\frac{n.s^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)\hat{s}^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{\sigma^2}$$

يتبع توزيع **كاي تربيع** بدرجة حرية $n-1$، أي:

$$\frac{n.s^2}{\sigma^2} \rightarrow K^2_{n-1}$$

مثال:

تقوم آلة أوتوماتيكية بقطع أسلاك معدنية لاستخدامها في صنع قضبان التلحيم، إذا اعتبرنا أن أطوال القضبان المنتجة متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره 30 سم وانحراف معياري 0.5 سم. وتم سحب عينة من 25 قضيب من انتاج هذه الآلة، **والمطلوب**: ما احتمال أن يكون تباينها أكبر من 0.38 سم؟

الحل:

*حساب احتمال أن يكون تباين العينة أكبر من 0.38 سم، أي:

$$p(s^2 > 0.38) = ?$$

نعلم أن:

$$\frac{n.s^2}{\sigma^2} \to K_{n-1}^2$$

ومنه:

$$p(s^2 > 0.38) = p\left(\frac{ns^2}{\sigma^2} > \frac{25.0,38}{0,5^2}\right) = p(k_{24}^2 > 38) = 1 - p(k_{24}^2 \leq 38)$$

وبالنظر إلى جدول توزيع كاي تربيع نجد أن القيمة الجدولية 38 محصورة مابين القيمة 36.4 التي تقابل إحتمال قدره 0.95 والقيمة 39.4 التي تقابل الاحتمال 0.975، وبعد الحساب الاستكمالي نجد أن الاحتمال المقابل للقيمة الجدولية 38 هو 0.963 وهذا بالتأكيد عند درجة حرية قدرها 24 وبذلك يصبح لدينا:

$$p(s^2 > 0.38) = 1 - 0.963 = \mathbf{0.037}$$

4.توزيع الفرق بين متوسطي عينتين $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$:

إذا كان لدينا المتغير x_1 يتبع التوزيع الطبيعي $x_1 \to N(\mu_1, \sigma_1^2)$ وتم سحب عينة حجمها n_1 من مجتمعه والمتغير x_2 يتبع التوزيع الطبيعي أيضا $x_2 \to N(\mu_2, \sigma_2^2)$ وسحبت من مجتمعه عينة حجمها n_2 وكان المجتمعين مستقلين، فإن المتغير المعبر عنه بـ : $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ يمثل متغيراً عشوائيا للفرق بين متوسطي العينتين يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره $E(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ وتباين قدره $v(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ ، حيث:

$$\boxed{\begin{gathered} E(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = E(\bar{x}_1) - E(\bar{x}_2) \\ v(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = v(\bar{x}_1) + v(\bar{x}_2) \end{gathered}}$$

ونفرق هنا بين ثلاث حالات هي:

1.4.إذا كان σ_1^2 و σ_2^2 معلومين فإن:

$$\boxed{\begin{gathered} E(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = E(\bar{x}_1) - E(\bar{x}_2) = \mu_1 - \mu_2 \\ v(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = v(\bar{x}_1) + v(\bar{x}_2) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} \end{gathered}}$$

أي:

$$\boxed{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \to N\left(\mu_1 - \mu_2; \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)}$$

وبذلك يكون لدينا المتغير Z المعرف فيما يلي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري، أي:

$$\boxed{Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \rightarrow N(0,1)}$$

مثال:

إذا كان لدينا المتغيرين x_1 و x_1 حيث: $x_1 \rightarrow N(30{,}25)$ وسحبت من مجتمعه عينة حجمها 30 مشاهدة،

$x_2 \rightarrow N(20{,}16)$ وسحبت من مجتمعه عينة حجمها 35 مشاهدة، **والمطلوب**:

1.أوجد توزيع الفرق بين متوسطي العينتين؛

2.أحسب الاحتمال التالي: $p\ (\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < 12)$.

الحل:

1.بالتطبيق المباشر للعلاقة التالية:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \rightarrow N\left(\mu_1 - \mu_2; \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

نحصل على:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \rightarrow N\left(30 - 20; \frac{25}{30} + \frac{16}{35}\right) \Leftrightarrow (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \rightarrow N(10; 1.29)$$

أي أن الفرق بين متوسطي العينتين يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره 10 وتباين قدره 1.29.

2.حساب الاحتمال التالي:

$$p\ ((\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < 12) = p\left(\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - 10}{\sqrt{1.29}} < \frac{12 - 10}{\sqrt{1.29}}\right) = p(Z < 1.76) = \mathbf{0.9608}$$

2.4.إذا كان σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين وحجم العينتين كبير $n_2, n_1 \geq 30$:

في هذه الحالة فإن الفرق بين متوسطي العينتين يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره: $(\mu_1 - \mu_2)$ وتباين قدره: $\left(\frac{S_1^2}{n_1 - 1} + \frac{S_2^2}{n_2 - 1}\right)$، ونكتب:

$$\boxed{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \rightarrow N\left(\mu_1 - \mu_2; \frac{s_1^2}{n_1 - 1} + \frac{s_2^2}{n_2 - 1}\right)}$$

مثال:

بفرض أن هناك معمل ينتج 700 كغ من العجائن كمعدل يومي، سحبت منه عينة عشوائية تمثل إنتاج 40 يوماً يبلغ وسطها الحسابي 740 كغ بانحراف معياري 40 كغ. معمل آخر ينتج 500 كغ كمعدل يومي، سحبت منه عينة عشوائية تمثل إنتاج 35 يوماً يبلغ وسطها الحسابي 480 كغ بانحراف معياري 20 كغ. **والمطلوب**:

1. ما هو التوزيع الاحتمالي للفرق بين متوسطي العينتين؟

2. أحسب الاحتمال التالي:

$$p(180 < \bar{x}_1 - \bar{x}_2 < 210)$$

الحل:

لدينا من المسألة $S_1^2 = 1600$ و $S_2^2 = 400$ وحيث أن $n_1 = 40$,$n_2 = 35$ وكليهما أكبر من 30 وبذلك يكون توزيع الفرق بين وسطي العينتين هو :

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \to N((700-500); \frac{1600}{39} + \frac{400}{34})$$

أي:

$$(\bar{\boldsymbol{x}}_1 - \bar{\boldsymbol{x}}_2) \to \boldsymbol{N(200, 52.78)}$$

وبالمقابل يكون لدينا:

$$\boldsymbol{Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - 200}{\sqrt{52.78}} \to N(0,1)}$$

وعليه يكون الاحتمال المطلوب هو:

$$*\boldsymbol{p(180 < \bar{x}_1 - \bar{x}_2 < 210)} = p\left(\frac{180-200}{\sqrt{52.78}} < \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-200}{\sqrt{52.78}} < \frac{210-200}{\sqrt{52.78}}\right)$$

$$= p(-2.75 < z < 1.37) = F(1.37) - F(-2.75)$$
$$= F(1.37) - 1 + F(2.75) = 0.9147 - 1 + 0.9970 = \mathbf{0.9117}$$

ملاحظة: التوزيع أعلاه يصلح أيضا عند السحب من مجتمعين غير طبيعيين أو مجهولي التوزيع بشرط كبر حجم العينة، وذلك استنادًا لنظرية **النهاية المركزية**.

3.4. إذا كان $\boldsymbol{\sigma_1^2}$ و $\boldsymbol{\sigma_2^2}$ مجهولين وحجم العينتين صغير $\boldsymbol{n_1 < 30}$, $\boldsymbol{n_2 < 30}$:

إذا سحبنا من مجتمع طبيعي وسطه μ_1 وتباينه σ_1^2 عينة صغيرة حجمها n_1، وسحبنا من مجتمع طبيعي ثاني وسطه μ_2 وتباينه σ_2^2 عينة حجمها n_2 صغيرة أيضا، فإن المتغير العشوائي المعبر عنه بـ $\boldsymbol{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}$ يتبع توزيع ستودينت بدرجة حرية قدرها $\boldsymbol{(n_1 + n_2 - 2)}$ حيث:

$$\frac{\boldsymbol{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}}{\sqrt{\boldsymbol{\frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}} = \boldsymbol{t_{n_1+n_2-2}}$$

مثال: بفرض أنه تم سحب عينتين مستقلتين من مجتمعين طبيعيين، بحيث $(\mu_1 = \mu_2$ و $\sigma_1 = \sigma_2)$ وكانت النتائج على النحو التالي:

$$n_1 = 10 \quad ; \quad n_2 = 14 \quad ; \quad S_1^2 = 16.4 \quad ; \quad S_2^2 = 22.5$$

والمطلوب: أحسب الاحتمال التالي: $p(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) > 2.5$.

الحل:

بما أن حجم n_1 و n_2 أقل من 30 نستعمل العلاقة التالية لتوزيع ستيودنت:

$$\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = t_{n_1+n_2-2}$$

وبما أن: $\mu_1 = \mu_2$ أي $\mu_1 - \mu_2 = 0$ يصبح لدينا :

$$p(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) > 2.5 = p\left(\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} > \frac{2.5}{\sqrt{\frac{10.(16,4) + 14.(22,5)}{10 + 14 - 2}\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{14}\right)}}\right)$$

$$= p(t_{10+14-2} > 1,3)$$

$$= p(t_{22} > 1,3) = 1 - P(t_{22} \le 1.3)$$
$$= 1 - \mathbf{0.9032} = \mathbf{0.0968}$$

5. توزيع المعاينة للفرق بين نسبتي عينتين$(f_1 - f_2)$:

لو سحبت عينتان عشوائيتان حجمهما كبير $(n_1; n_2 \ge 30)$ من مجتمعين مستقلين، يخضع كل من الأول والثاني للتوزيع الطبيعي فإن الفرق بين نسبتي هاتين العينتين يتبع تقريبا التوزيع الطبيعي، بمتوسط قدره $E(f_1 - f_2)$ وتباين قدره $v(f_1 - f_2)$ حيث:

$$\boxed{\begin{array}{c} E(f_1 - f_2) = (\boldsymbol{p_1 - p_2}) \\ v(f_1 - f_2) = \left(\frac{\boldsymbol{p_1 q_1}}{\boldsymbol{n_1}} + \frac{\boldsymbol{p_2 q_2}}{\boldsymbol{n_2}}\right) \end{array}}$$

ونكتب:

$$\boxed{(\boldsymbol{f_1 - f_2}) \to \boldsymbol{N}\left(\boldsymbol{p_1 - p_2}; \frac{\boldsymbol{p_1 q_1}}{\boldsymbol{n_1}} + \frac{\boldsymbol{p_2 q_2}}{\boldsymbol{n_2}}\right)}$$

مثال:

بفرض أن منتوج أ مستعمل من 30% من المستهلكين في المنطقة س و25 % من المستهلكين في المنطقة ع، فإذا سحبنا عينتان حجمهما 200 من كل منطقة. **فالمطلوب**: ما احتمال أن نسبة استعمال المنتوج من طرف مستهلكي العينتين يكون أكبر في المنطقة الثانية عن الأولى؟

الحل:

لدينا:

$$p_1 = 0.3 \quad , \quad p_2 = 0.25 \quad , \qquad q_1 = 0.7 \quad , \qquad q_2 = 0.75 \ , n_1 = 200 \ , n_2 = 200$$

*إيجاد احتمال أن نسبة استعمال المنتوج من طرف مستهلكي العينتين يكون أكبر في المنطقة الثانية عن الأولى، أي:

$$\boldsymbol{p(f_2 > f_1)} = p(f_1 - f_2 \leq 0) = p\left(\frac{(f_1 - f_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}} \leq \frac{0 - 0{,}05}{\sqrt{\frac{0{,}3.0{,}7}{200} + \frac{0{,}25.0{,}75}{200}}}\right)$$
$$= p(z \leq -1.12) = 1 - p(z \leq 1.12) = 1 - \boldsymbol{0.8686} = \boldsymbol{0.1314}$$

6. توزيع النسبة بين تبايني عينتين $\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\right)$:

يعتبر هذا التوزيع من التوزيعات الهامة التي تبحث في تجانس المجتمعات حيث نلجأ إلى حساب النسب بين التباينات وليس الفرق بينها وذلك لسهولة دراسة النسب وتفسيرها. فإذا سحبت عينة حجمها n_1 وتباينها S_1^2 من مجتمع طبيعي $N(\mu_1;\ \sigma_1^2)$ وعينة أخرى حجمها n_2 وتباينها S_2^2 من مجتمع طبيعي أيضا $N(\mu_2;\ \sigma_2^2)$ مستقل عن المجتمع الأول فإن المتغير المعطى بالعلاقة التالية[1]:

$$\boldsymbol{F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}}$$

يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية $(n_1 - 1)$ و$(n_2 - 1)$ ونكتب:

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \rightarrow F(n_1 - 1;\ n_2 - 1)}}$$

وإذا تساوى تبايني المجتمعين فإن:

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{S_1^2}{S_2^2} \rightarrow F(n_1 - 1;\ n_2 - 1)}}$$

[1] جمال رشيد الكحلوت، مرجع سبق ذكره، ص.8.

مثال:

سحبت عينة حجمها 11 من مجتمع طبيعي تباينه 9، وسحبت عينة أخرى حجمها 27 من مجتمع طبيعي أيضا تباينه 25 مستقل عن المجتمع الأول. **والمطلوب:** أوجد احتمال أن تكون النسبة بين تبايني العينتين أقل من 0.8.

الحل:

لدينا:

$$\boldsymbol{F = \frac{S_1^2/9}{S_2^2/25} \rightarrow F(10;\ 26)}$$

$$p\left(\frac{s_1^2}{s_2^2} < 0.8\right) = p\left(\frac{S_1^2/9}{S_2^2/25} < (0.8)\left(\frac{25}{9}\right)\right)$$

$$= \ p\left(F_{10;26} < 2.22\right) = \mathbf{0.95}$$

ثانيا: بناء مجالات الثقة "التقدير بمجال"

نقصد **بمعالم المجتمع** مجموعة من خصائصه كالمتوسط و التباين و النسبة، حيث يتم حساب هذه المعالم عند استخدام الحصر الشامل بشكل دقيق، لكن غالبا ما تكون هذه المعالم مجهولة فنقوم بتقديرها من بيانات العينة تقديرا لنظيرتها من معالم المجتمع، حيث يتم:

- ✓ تقدير المتوسط الحسابي للمجتمع μ انطلاقا من متوسط العينة $\overline{x}$ ؛
- ✓ تقدير الانحراف المعياري للمجتمع σ انطلاقا من الانحراف المعياري للعينة s؛
- ✓ تقدير النسبة للمجتمع p انطلاقا من النسبة للعينة f.

وللتقدير الإحصائي نوعان هما التقدير النقطي أو ما يسمى بالتقدير بقيمة والتقدير بمجال:

1.التقدير النقطي:

عندما نقدر معلمة المجتمع برقم واحد يحسب من بيانات العينة فإن هذا الرقم يسمى تقدير نقطي لهذه المعلمة والذي يحسب اعتمادا على المقدر النقطي لهذه المعلمة، أي أن **المقدر** هو الصيغة الرياضية أو الإحصائية التي نقدر بها معلمة المجتمع بينما **التقدير** هو القيمة العددية لهذه الإحصائية.[1]

2.خصائص المقدر الجيد:

[1] ديفيد جيه هاند، مرجع سبق ذكره، ص .78-79.

غالبا ما نجد أكثر من مقدّر يمكن استخدام قيمته كتقدير لمعلمة المجتمع المجهولة، لذلك نحتاج إلى معايير يمكن الاستعانة بها لاختيار المقدر الذي يعتبر أفضل من غيره لتقدير لمعلمة المجتمع. والتي تتلخص في ثلاث معايير أساسية هي[1]:

1.2. عدم التحيز Unbiased:

نقول عن المقدر $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ أنه **غير متحيز** للمعلمة $\boldsymbol{\theta}$ إذا كان التوقع الرياضي لـ $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ يساوي المقدار نفسه ونعبر عن ذلك رياضيا كالتالي:

$$\boxed{\boldsymbol{E(\hat{\theta}) = \theta}}$$

أما إذا كان $E(\hat{\theta}) \neq \theta$ فهذا يعني أن $\hat{\theta}$ مقدر **متحيز** للمعلمة θ أي أنه لا يمثل المعلمة تمثيلا صحيحا، حيث يُعبر عن مقدار التحيز **b** بالصيغة التالية:

$$\boxed{\boldsymbol{E(\hat{\theta}) - \theta = b}}$$

مثال:

ليكن $\boldsymbol{x}$ متغير عشوائي حيث:

$$E(x) = \mu \quad \text{و} \quad V(x) = \sigma^2$$

غالبا ما يكون وسط المجتمع μ مجهول لذلك يتم تقديره بوسط العينة $\bar{x}$ لما يتميز به هذا الأخير من خصائص منها عدم التحيز حيث يكون $\bar{x}$ **غير متحيز** لـ μ إذا كان:

$$\boldsymbol{E(\bar{x}) = \mu}$$

لدينا:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

ومنه:

$$E(\bar{x}) = E\left(\frac{\sum x_i}{n}\right) = \frac{1}{n}.\sum E(x_i) \dots\dots\dots (1)$$

ومن جهة أخرى نعلم أن:

$$E(x) = \mu$$

[1] علي أحمد السقاف. **الاحصاء الوصفي والاستدلالي**. الطبعة الأولى، 2020، إصدار المركز الديمقراطي العربي، برلين المانيا، ص.116.

وعليه تصبح العلاقة (1) كما يلي:

$$E(\bar{x}) = \frac{1}{n}.n.\mu = \boldsymbol{\mu}$$

أي أن:

$$\boldsymbol{E(\bar{x}) = \mu}$$

وبذلك يمكن القول أن وسط العينة $\bar{x}$ هو مقدر **غير متحيز** لوسط المجتمع μ.

2.2. معيار التقارب أو التوافق Consistency:

نقول عن المقدر $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ أنه متقارب إذا كانت قيمته تؤول إلى قيمة المعلمة $\boldsymbol{\theta}$ كلما زاد حجم العينة، أي أنّ تباينه يؤول إلى الصفر عندما تؤول n إلى مالا نهاية أو إلى حجم المجتمع N، أي :

$$\boxed{\left\{ v(\hat{\theta}) \xrightarrow[n\to\infty(N)]{} 0 \right.}$$

مثال:

نفرض أن x متغير عشوائي حيث:

$$E(x) = \mu \quad \text{و} \quad v(x) = \sigma^2$$

يكون $\bar{x}$ مقدر مقارب لـ μ أو متماسك إذا كان:

$$\left\{ \bar{x} \xrightarrow[n\to\infty(N)]{} \mu \right.$$

أي:

$$\left\{ v(\bar{x}) \xrightarrow[n\to\infty(N)]{} 0 \right.$$

لدينا:

$$v(\bar{x}) = v\left(\frac{\sum x_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2}.n.v(x) \ldots\ldots\ldots (2)$$

ونعلم أن:

$$v(x) = \sigma^2$$

وعليه تصبح العلاقة (2) كما يلي:

$$V(\bar{x}) = \frac{1}{n^2}.n.\sigma^2 = \boldsymbol{\frac{\sigma^2}{n}}$$

ومن جهة أخرى نلاحظ أن المقدار $\frac{\sigma^2}{n}$ يؤول فعلا إلى الصفر عندما يؤول n إلى $\infty(N)$ ومنه يمكن القول أن متوسط العينة هو مقدر **مقارب** لـ وسط المجتمع μ أي أنه **متماسك**.

3.2. الكفاءة أوالفعالية Efficiency:

إذا كان $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$ مقدرين غير متحيزين للمعلمة θ و كان تباين $\hat{\theta}_1$ أقل من تباين $\hat{\theta}_2$ ، أي:

$$v(\hat{\theta}_1) < v(\hat{\theta}_2)$$

في هذه الحالة فإننا نقول أنّ المقدر $\hat{\theta}_1$ أكثر كفاءة من المقدر $\hat{\theta}_2$ ، ومنه فالمقدر الفعال هو المقدر ذو **التباين الأصغر**.

3. التقدير بمجال:

بما أننا لا نتوقع أن تكون قيمة المقدر مساوية للمعلمة المجهولة مهما كان المقدر جيد، فيتم اللجوء إلى تحديد مجال يحتوي على مجموعة من القيم تتضمن فيما بينها قيمة معلمة المجتمع المجهولة θ يسمى هذا المجال **بمجال الثقة أو فترة الثقة**. حيث نسبة الحظوظ أو احتمال أن تقع معلمة المجتمع θ في هذا المجال تسمى **درجة الثقة** أو **مستوى الثقة** وبذلك نكون قد **قدرنا معلمة المجتمع بمجال** ونكتب:

$$IC(\theta)_{1-\alpha} = [T_1; T_2]$$

أي:

$$p(\theta \epsilon [T_1; T_2]) = 1 - \alpha$$

حيث:

$T_2; T_1$: هما على التوالي الحد الأدنى والحد الأعلى لمجال الثقة، مع $T_1 < T_2$ ؛

$1 - \alpha$: مستوى الثقة أو درجة الثقة؛

α : احتمال الخطأ أو مستوى المعنوية أو درجة المخاطرة والذي يعبر عن احتمال عدم احتواء مجال الثقة على القيمة الحقيقية لـ θ والتي عادة ما تكون من اختيار الباحث حسب درجة الدقة التي يبحث عنها.

1.3. مجال الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع μ:

1.1.3. إذا كان حجم العينة كبير $(n \geq 30)$:

نعلم أنه في هذه الحالة $\bar{x}$ يتبع تقريبا التوزيع الطبيعي حيث:

$$\boxed{Z = \frac{\bar{x} - E(\bar{x})}{\sqrt{V(\bar{x})}} \to N(0; 1)}$$

لبناء مجال الثقة لـ μ يُمكن أن ننطلق من مفهوم مجال الثقة كما يلي:

$$p(\mu \epsilon IC) = 1 - \alpha$$
$$\Leftrightarrow p(\mu \epsilon [T_1; T_2]) = 1 - \alpha$$
$$\Leftrightarrow p(T_1 \leq \mu \leq T_2) = 1 - \alpha$$

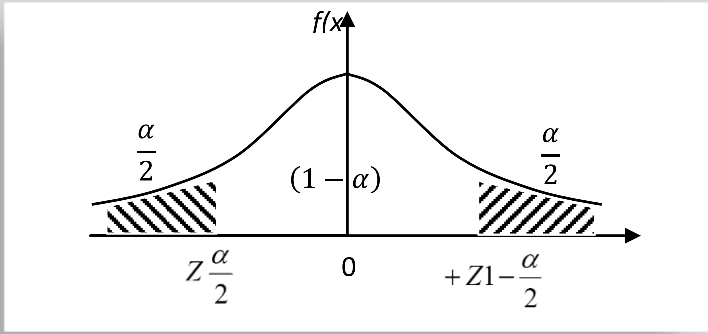
ينبغي إذن تحديد حدود مجال الثقة T_1و T_2 إنطلاقا من حصر Z بين قيمتين حيث:

$$\boldsymbol{Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{v(\bar{x})}}}$$

لأن $\mu = E(\bar{x})$ في كل الحالات.

ويمكن توضيح ذلك بيانيا كما يلي في الشكل رقم (6) :

شكل رقم (6): تمثيل بياني لكيفية حصر z بين قيمتين



المصدر: من إعداد الباحثة

يعني الشكل أعلاه أن:

$$\boldsymbol{p\left(z_{\frac{\alpha}{2}} \leq z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha}$$

ومن خاصية التناظر نستنتج أن:

$$\boldsymbol{z_{\frac{\alpha}{2}} = -z_{1-\frac{\alpha}{2}}}$$

ومنه يصبح لدينا:

$$\boldsymbol{p\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha}$$

وبتعويض قيمة z بما تساويه نجد:

$$\boldsymbol{p\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{v(\bar{x})}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha}$$

وبضرب أطراف المتراجحة في $\sqrt{v(\bar{x})}$نجد:

$$\boldsymbol{p\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{v(\bar{x})} \leq \bar{x} - \mu \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{v(\bar{x})}\right) = 1 - \alpha}$$

ثم بطرح قيمة $\bar{x}$من أطراف المتراجحة نجد:

$$p\left(-\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{v(\bar{x})} \leq -\mu \leq -\bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{v(\bar{x})}\right) = 1 - \alpha$$

نضرب الآن أطراف المتراجحة في -1 فيتغير اتجاهها وتصبح كما يلي:

$$p\left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{v(\bar{x})} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{v(\bar{x})}\right) = 1 - \alpha$$

هذا يعني أن مجال الثقة لـ μ هو:

$$IC(\mu)_{(1-\alpha)\%} = \left[\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{v(\bar{x})}\,;\bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{v(\bar{x})}\right]$$

حيث:

أ. إذا كان σ^2 معلوم فإن:

$$IC(\mu)_{(1-\alpha)\%} = \left[\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

ب. إذا كان σ^2 مجهول فإن:

$$IC(\mu)_{(1-\alpha)\%} = \left[\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{s}{\sqrt{n-1}}\,;\bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{s}{\sqrt{n-1}}\right]$$

والجدول رقم (1) يبين درجات الثقة الشائعة واحتمالات الخطأ وقيم $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ الموافقة لها:

جدول رقم (1): درجات الثقة الشائعة

مستوى الثقة $1-\alpha$	0.90 90%	0.95 95%	0.99 99%
احتمال الخطأ α	0.10 10%	0.05 5%	0.01 1%
$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	1.645	1.96	2.58
أي	$z_{0.95} = 1.645$	$z_{0.975} = 1.96$	$z_{0.995} = 2.58$

مثال:

إذا كانت أعمار المصابيح الكهربائية التي تنتجها أحد المصانع تتبع التوزيع الطبيعي بانحراف معياري قدره 250 ساعة. اختيرت عينة من انتاج هذا المصنع حجمها 100 مصباح وكان متوسط عمر المصباح في هذه العينة هو 1200 ساعة. و**المطلوب**: قدر بمجال (حدد مجال الثقة لـ) متوسط عمر المصباح في المصنع كله بدرجة ثقة 95%.

الحل:

لدينا:

$$\mu =? \quad ; \quad (1-\alpha) = 95\% \Rightarrow \alpha = 5\% \quad ; \quad \bar{x} = 1200 \; ; \quad \sigma^2 = 250^2 \quad ; \quad n = 100 \geq \mathbf{30}$$

أي أن $\bar{x}$ يتبع التوزيع الطبيعي، ومنه فإن مجال الثقة لـ μ يعطى بالصيغة التالية:

$$\boldsymbol{IC(\mu)_{(1-\alpha)\%} = \left[\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \; ; \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]}$$

حيث:

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{250}{\sqrt{100}} = \mathbf{25} \quad ; \quad z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{1-\frac{0.05}{2}} = z_{0.975} = \mathbf{1.96}$$

ومنه:

$$IC(\mu)_{(95)\%} = [1200 - 1.96 \times 25 \, ; 1200 + 1.96 \times 25]$$

$$= [\mathbf{1151} \, ; \mathbf{1249}]$$

أي أن متوسط عمر المصباح من انتاج المصنع كله يتراوح بين 1151 و1249 ساعة بمستوى ثقة 95 %.

2.1.3. إذا كان حجم العينة صغير $n < 30$:

نعلم أنه إذا كان$n < 30$ و x يتوزع طبيعيا مع σ^2 مجهول فإن:

$$\boldsymbol{T = \frac{\bar{x} - E(\bar{x})}{\sqrt{V(\bar{x})}} \to t_{n-1}}$$

وبذلك يكون مجال الثقة لـ μ في هذه الحالة كما يلي:

$$\boldsymbol{IC(\mu)_{(1-\alpha)\%} = \left[\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}.\frac{s}{\sqrt{n-1}} \; ; \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}.\frac{s}{\sqrt{n-1}}\right]}$$

مثال:

إذا كانت أجور العمال لإحدى الشركات تتبع التوزيع الطبيعي وتم اختيار عينة من 25 عامل فوجد أن متوسط أجرهم الشهري 4250 ون والانحراف المعياري 400 ون. و**المطلوب**: إيجاد مجال الثقة (قدر بمجال) لمتوسط الأجر الشهري لعمال المصنع كله بدرجة ثقة 95%.

الحل:

لدينا:

$$\mu =? \quad ; \quad (1-\alpha) = 95\% \Rightarrow \alpha = 5\% \quad ; \quad \bar{x} = 4250 \; ; \; S = 400 \; \left(\boldsymbol{\sigma^2}\text{مجهول}\right) \; ; \quad n = 25 < \mathbf{30}$$

و $x \to N(\mu \, , \sigma^2)$ ، في هذه الحالة نستخدم توزيع ستيودنت ويكون مجال الثقة لـ μ كما يلي:

$$\boldsymbol{IC(\mu)_{(1-\alpha)\%} = \left[\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2};\,n-1}.\frac{s}{\sqrt{n-1}} \; ; \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2};\,n-1}.\frac{s}{\sqrt{n-1}}\right]}$$

حيث:

$$t_{1-\frac{\alpha}{2};\,n-1} = t_{1-\frac{0.05}{2};\,25-1} = t_{0.975;\,24} = \mathbf{2.06}$$

ومنه:

$$IC(\mu)_{(95)\%}=\left[4250-2.06\times\frac{400}{\sqrt{25-1}}\,;4250+2.06\times\frac{400}{\sqrt{25-1}}\right]$$

$$=[\mathbf{4081.80}\,;\mathbf{4418.20}]$$

2.3. مجال الثقة لنسبة المجتمع P:

نعلم أنه من أجل القيم الكبيرة لـ n ($n \geq 30$) فإن f تتبع تقريبا التوزيع الطبيعي بمتوسط $E(f)$ وتباين $v(f)$ وبذلك فإن مجال الثقة لـP يتحدد بتعويض μ بـ P و $\bar{x}$ بـ f و$\sqrt{v(\bar{x})}$ بـ $\sqrt{v(f)}$ في مجال الثقة لـ μ ليصبح كما يلي:

$$IC(p)_{(1\text{-}\alpha)\%}=\left[f\text{-}Z_{1\text{-}\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{v(f)};f+Z_{1\text{-}\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{v(f)}\right]$$

حيث: $\sqrt{\boldsymbol{v(f)}}=\sqrt{\frac{\boldsymbol{f(1-f)}}{\boldsymbol{n}}}$ عوض $\sqrt{\frac{pq}{n}}$ لأن P مجهولة.

مثال:

أخذت عينة من 500 منتج من انتاج أحد المصانع، فوجد أن بينها 100 منتج معيب. **والمطلوب**: أوجد بدرجة ثقة 99% نسبة المنتجات المعيبة في انتاج المصنع.

الحل:

لدينا:

$$p=?\;\;;\;\;(1-\alpha)=99\%\Rightarrow\alpha=\mathbf{1}\%\;\;;\;\;f=\frac{100}{500}=\mathbf{0.2}\;\;;\;\;\;n=500\geq\mathbf{30}$$

ومنه فإن مجال الثقة لـ p هو :

$$\boldsymbol{IC(P)_{(1-\alpha)\%}}=\left[\boldsymbol{f}-\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{1-\frac{\alpha}{2}}}.\sqrt{\frac{\boldsymbol{f(1-f)}}{\boldsymbol{n}}};\boldsymbol{f}+\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{1-\frac{\alpha}{2}}}.\sqrt{\frac{\boldsymbol{f(1-f)}}{\boldsymbol{n}}}\right]$$

حيث:

$$\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}=\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{500}}=\mathbf{0.018}$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}=Z_{1-\frac{0.01}{2}}=Z_{0.995}=\mathbf{2.58}$$

ومنه:

$$IC(P)_{(99)\%}=[0.2-2.58\times0.018\,;0.2+2.58\times0.018]$$

$$=[\mathbf{0.1536}\,;\mathbf{0.2464}]$$

أي:

$$=[\mathbf{15.36}\%\,;\mathbf{24.64}\%]$$

وبذلك يمكن القول أن نسبة المنتجات المعيبة في انتاج المصنع تقع بين 15.36 % و24.64% وهذا بدرجة ثقة قدرها 99%.

3.3. مجال الثقة لتباين المجتمع σ^2:

نعلم أنه إذا كان لدينا عينات عشوائية حجمها n عنصر من مجتمع طبيـعي فإن المتغير $\frac{nS^2}{\sigma^2}$ يتبع توزيع كاي مربع بدرجة حرية (n−1) حيث: S^2 هو تباين العينة و σ^2 هو تباين المجتمع. وعليه فإن مجال الثقة لـ σ^2 يعطى بالشكل التالي:

$$\mathbf{IC}\left(\boldsymbol{\sigma}^2\right)_{(1-\propto)\%} = \left[\frac{\boldsymbol{n\,s^2}}{\mathbf{K^2_{1-\frac{\alpha}{2}};n\_1}}\ ;\frac{\boldsymbol{n\,s^2}}{\mathbf{K^2_{\frac{\alpha}{2}};n\_1}}\right]$$

مثال:

تم اختيار عينة من 20 شخص من أحد المناطق من أجل اجراء فحوصات طبية وكان ضغط الدم للمجموعة يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 90 وانحراف معياري 9. **المطلوب:** أوجد مجال الثقة لتباين المجتمع عند درجة ثقة 95%.

الحل:

$$\sigma^2 = ?\ ;\ (1-\alpha) = 95\% \Rightarrow \alpha = \mathbf{5}\%\ ;\ S = 9\ ;\ n = 20\ ;\ \bar{x} = 90$$

نعلم أن:

$$\mathrm{IC}\left(\sigma^2\right)_{(1-\propto)\%} = \left[\frac{n\,s^2}{\mathrm{K^2_{1-\frac{\alpha}{2}};n\_1}}\ ;\frac{n\,s^2}{\mathrm{K^2_{\frac{\alpha}{2}};n\_1}}\right]$$

أي:

$$\mathrm{IC}\left(\sigma^2\right)_{(95)\%} = \left[\frac{20\times 9^2}{\mathrm{K^2_{0.975}};19}\ ;\frac{20\times 9^2}{\mathrm{K^2_{0.025}};19}\right]$$

$$= \left[\frac{20\times 9^2}{\mathrm{K^2_{0.975}};19}\ ;\frac{20\times 9^2}{\mathrm{K^2_{0.025}};19}\right]$$

$$= [\mathbf{49.24}\ ;\mathbf{181.82}]$$

أي أن تباين ضغط الدم عند مستوى ثقة 95% يقع مابين **49.24** و**181.82**.

ملاحظة:

يمكن الحصول على مجال الثقة للانحراف المعياري بمستوى ثقة $(1-\alpha)\%$ وذلك بأخذ الجذور التربيعية الموجبة لحدود مجال الثقة للتباين، أي:

$$\mathbf{IC}(\boldsymbol{\sigma})_{(1-\propto)\%} = \left[\sqrt{\frac{\boldsymbol{n\,s^2}}{\mathbf{K}^2_{\frac{\alpha}{2}};\mathbf{n\_1}}};\sqrt{\frac{\boldsymbol{n\,s^2}}{\mathbf{K}^2_{\frac{\alpha}{2}};\mathbf{n\_1}}}\right]$$

4. خطأ المعاينة في التقدير وحجم العينة اللازم لعدم تجاوز خطأ معين:

إن تقدير أي معلمة من معالم المجتمع $(p;\sigma^2;\mu)$ بواسطة $(f;s^2;\bar{x})$ يترتب عليه خطأ يدعى **خطأ المعاينة** وسببه إجراء الدراسة الإحصائية على عينة بدلا من أن تكون شاملة. ورياضيا يمثل خطأ المعاينة $\boldsymbol{E}$ **القيمة المطلقة للفرق بين قيمة المقدر $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ والقيمة الحقيقية للمعلمة $\boldsymbol{\theta}$** أي:

$$\boxed{\boldsymbol{E = |\widehat{\theta} - \theta|}}$$

1.4. حالة المتوسط الحسابي للمجتمع μ:

نعلم أنه عند مستوى ثقة $(1-\alpha)\%$ فإن مجال الثقة للمتوسط الحسابي في حالة ما كان تباين المجتمع معلوم هو[1]:

$$\mathrm{IC}(\mu)_{(1-\propto)\%} = \left[\bar{x} - Z_{1-\frac{\propto}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\bar{x} + Z_{1-\frac{\propto}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

أي أن:

$$\boldsymbol{\bar{x} - Z_{1-\frac{\propto}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + Z_{1-\frac{\propto}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

ومنه:

$$\boldsymbol{-Z_{1-\frac{\propto}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \bar{x} - \mu \le +Z_{1-\frac{\propto}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

وبذلك يكون:

$$\boxed{\boldsymbol{|\bar{x} - \mu| \le +Z_{1-\frac{\propto}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}$$

أي أن خطأ المعاينة في تقدير $\boldsymbol{\mu}$ باستخدام $\boldsymbol{\bar{x}}$ هو على الأكثر المقدار: $\boldsymbol{Z_{1-\frac{\propto}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ ونسمي هذا المقدار **بالحد الأعلى لخطأ المعاينة في تقدير μ** ونرمز له بـ E حيث:

$$\boxed{\boldsymbol{E = Z_{1-\frac{\propto}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}$$

[1] سهير فهمي حجازي ومحمود الدريني، مرجع سبق ذكره، ص.54.

وانطلاقا من صيغة E يمكن حساب حجم العينة n حيث نقوم بتربيع الطرفين فنجد:

$$E^2 = (Z_{1-\frac{\propto}{2}})^2 . \frac{\sigma^2}{n}$$

ومنه:

$$\boxed{n = (Z_{1-\frac{\propto}{2}})^2 . \frac{\partial^2}{E^2}}$$

وهو **حجم العينة** المطلوب.

وفي هذا السياق لدينا الملاحظات التالية:

ملاحظة1:

هناك علاقة **عكسية** بين حجم العينة n و مقدار الخطأ في التقدير E حيث كلما زاد حجم العينة كلما كان **خطأ المعاينة ضعيف** وكانت الدراسة الاحصائية **أكثر دقة**.

ملاحظة2:

يتأثر تحديد حجم العينة بعدة عوامل منها: حجم المجتمع المراد دراسته، مستوى الثقة والانحراف المعياري.

ملاحظة3:

إن تحديد حجم العينة مسبقا في المعاينة الاحصائية يترتب عليه توفير الوقت اللازم والتحكم في التكاليف والحصول على نتائج جيدة وفي وقت قصير.

2.4. حالة نسبة المجتمع p:

عند تقدير نسبة المجتمع p بواسطة f فإن الحد الأعلى لخطأ المعاينة في تقدير p عند مستوى ثقة $(1-\alpha)\%$ هو:

$$\boxed{E = Z_{1-\frac{\propto}{2}} . \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}}$$

أما حجم العينة اللازم فهو:

$$\boxed{n = (Z_{1-\frac{\propto}{2}})^2 . \frac{f(1-f)}{E^2}}$$

ثالثا: تمارين مقترحة حول المحور الثاني

التمرين 1:

مجتمع طبيعي تباينه مقدر بـ 15، إذا سحبنا مع الإرجاع عينة حجمها 10، **فالمطلوب** حساب الإحتمال التالي:

$$p\left(\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2 \geq 31.35\right)$$

التمرين2:

بغرض إيجاد حل مستعجل لظاهرة رمي الخبز في المجتمع الجزائري تكفلت وزارة التجارة بدراسة الموضوع من كل جوانبه، حيث قامت في احدى الخطوات باستقصاء آراء عينة من العائلات حجمها 1700 عائلة فتبين أن عدد العائلات في العينة التي توافق على رفع سعر الخبز كحل لا مفر منه لهذه الظاهرة هو 34 عائلة.

والمطلوب:

1. متى نعتبر نسبة العينة f مقدرا متماسكا؟

2. قدر بمجال نسبة العائلات التي توافق على رفع سعر الخبز كحل لهذه الظاهرة في المجتمع الجزائري بإحتمال خطأ 1% واشرح النتيجة.

3. بفرض أن $p = 36\%$، و $n = 140$، أحسب احتمال أن لا تتجاوز نسبة العائلات التي توافق على رفع سعر الخبز في هذه العينة ثلثي نسبة هذه العائلات في المجتمع.

التمرين 3:

بغرض تقدير نسبة المؤسسات الاستشفائية العمومية EPH التي تقوم برسكلة نفاياتها الطبية كما يجب في الجزائر، أجريت دراسة إحصائية على عينة حجمها 250 مؤسسة إستشفائية، تبين من خلال هذه الدراسة أن 150 مؤسسة من هذه العينة لا تقوم برسكلة نفاياتها على الإطلاق. **والمطلوب**:

1. قدر بمجال نسبة المؤسسات الإستشفائية التي لا تقوم برسكلة نفاياتها في الجزائر بإحتمال خطأ قدره 5 %، واشرح النتيجة.

2. إذا علمت أن نسبة المؤسسات الإستشفائية التي تقوم برسكلة نفاياتها الطبية في الجزائر هي7% وتم سحب عينة عشوائية من 150 مؤسسة إستشفائية. أحسب احتمال أن تكون نسبة المؤسسات الاستشفائية التي تقوم برسكلة نفاياتها في هذه العينة محصورة بين 4% و8%.

3. بفرض أنه تم سحب عينتين من المؤسسات الإستشفائية الأولى من الجزائر والأخرى من تونس الشقيقة بغرض المقارنة بين نسبة المؤسسات المتبنية لنظام رسكلة النفايات الطبية فتم الحصول على البيانات التالية:

n_1	n_2	p_1	p_2	f_1	f_2
140	155	15%	7.5%	6%	12%

والمطلوب: ماهو القانون الإحتمالي للفرق بين نسبتي هاتين العينتين وحدد معالمه؟

التمرين 4:

ليكن لدينا أوزان السدادات المجمعة في إحدى حملات مساعدة أطفال القمر بولاية ميلة لعينة من 8 بلديات كما هو مبين في الجدول التالي:

البلدية	أ	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح
الوزن بالكلغ	5.7	6.4	5.9	6.8	7.1	5.8	6.2	7.3

والمطلوب:

1. قدر بمجال متوسط وزن السدادات المجمعة في البلدية الواحدة بولاية ميلة ككل بدرجة مخاطرة قدرها 5% مع الشرح.

2. حدد مجال الثقة لتباين أوزان السدادات ببلديات ولاية ميلة بدرجة ثقة قدرها 90%، ثم استنتج مجال الثقة للإنحراف المعياري بنفس درجة الثقة ومع شرح النتائج.

3. بفرض أن هذه الحملة شملت ولاية سطيف أيضا وكان حجم العينة المأخوذة من الولايتين هو 45 بلدية وكان الانحراف المعياري لوزن السدادات المجمعة في كامل بلديات ولايتي ميلة وسطيف هو 5.4 كلغ، **والمطلوب**: تحديد مقدار الخطأ المحتمل ارتكابه في تقدير متوسط وزن السدادات المجمعة في هذه البلديات ككل وهذا بمستوى معنوية 10%.

4. لو أردنا تحسين دقة النتائج في تقدير متوسط أوزان السدادات المجمعة في ولايتي سطيف وميلة بنسبة 34% حدد حجم العينة المطلوب لذلك وهذا بمستوى دلالة 1%.

التمرين 5:

يقوم مصنع لإنتاج أجهزة الكمبيوتر بمراقبة دورية لتحديد نسبة الإنتاج المعيب ولهذا الغرض تم سحب عينة مكونة من 100 جهاز من انتاج هذا المصنع فتبين وجود 4 أجهزة معيبة. **والمطلوب**:

1. ماهو مقدار الخطأ المحتمل ارتكابه في تقدير نسبة الانتاج المعيب في المصنع عند مستوى دلالة 5%.

2. أحسب حجم العينة اللازم حتى لا يتجاوز خطأ المعاينة في تقدير نسبة الانتاج المعيب في المصنع 0.01 وذلك عند مستوى معنوية 5%.

3. للمقارنة بين نسبة الانتاج المعيب في مصنعين لانتاج أجهزة الكمبيوتر تم سحب عينتين عشوائيتين من المصنعين فكانت العينة الأولى بحجم 70 جهاز سحبت من المصنع الأول الذي تبلغ نسبة الإنتاج المعيب به 4% بينما سحبت العينة الثانية بحجم 65 جهاز من المصنع الثاني الذي تبلغ نسبة الانتاج المعيب به 3%. **والمطلوب**: ما احتمال أن لا تزيد نسبة الإنتاج المعيب في العينة الأولى عن نسبة الانتاج المعيب في العينة الثانية بمقدار 0.01.

رابعا: حل التمارين المقترحة حول المحور الثاني

حل التمرين 1:

لدينا: $n = 10 \quad ; \quad \sigma^2 = 15$

حساب الإحتمال التالي:

$$p\left(\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 \geq 31.35\right) = ?$$

بقسمة الطرفين على حجم العينة n نجد :

$$p\left(\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 \geq 31.35\right) = p\left(\frac{\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2}{n} \geq \frac{31.35}{10}\right) = \boldsymbol{p(s^2 \geq 3.135)}$$

ونعلم مما سبق أنه إد=ذا تم سحب عينات من مجتمع طبيعي حجمها n عنصر فإن:

$$\frac{\boldsymbol{n.s^2}}{\boldsymbol{\sigma^2}} \to \boldsymbol{K^2_{n-1}}$$

وعليه يصبح الإحتمال المطلوب كالتالي:

$$\boldsymbol{p(s^2 \geq 3.135)} = p\left(\frac{n.s^2}{\sigma^2} \geq \frac{10.3,135}{15}\right) = p(k^2_{n-1} \geq 2,09) = p(k^2_9 \geq 2,09)$$
$$= 1 - p(k^2_9 < 2,09)$$

من جدول توزيع كاي تربيع نجد عد درجة حرية 9 و قيمة جدولية 2.09 نجد:

$$p(k^2_9 < 2,09) = 0.01$$

وبذلك يكون:

$$p\left(\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 \geq 31.35\right) = 1 - p(k^2_9 < 2,09) = 1 - 0.01 = \boldsymbol{0.99}$$

حل التمرين 2:

1. نعتبر أن نسبة العينة f مقدرا متماسكا إذا كان:

$$\begin{cases} f \to p \\ n \to \infty(N) \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} v(f) \to 0 \\ n \to \infty(N) \end{cases}$$

2. تقدير بمجال لنسبة العائلات التي توافق على رفع سعر الخبز كحل لظاهرة رمي الخبز في المجتمع الجزائري بإحتمال خطأ قدره 1% مع الشرح:

لدينا: $n \geq 30$ ومنه:

$$IC(p)_{99\%} = \left[f - z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{v(f)}; f + z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{v(f)}\right]$$

حيث:

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0,01}{2}} = Z_{0,995} = \boldsymbol{2,58} \quad ; \quad f = \frac{34}{1700} = \boldsymbol{0.02}$$

$$\sqrt{v(f)} = \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} = \sqrt{\frac{0.02(0,98)}{1700}} = \boldsymbol{0.0033}$$

ومنه:

$$IC(p)_{99\%} = [0,02 - 2,58\,.\,0,0033; 0,02 + 2,58\,.\,0,0033]$$
$$= [0,0114; 0,0285]$$
$$= [1,14\%; 2,85\%]$$

الشرح: بثقة قدرها 99% يمكن القول أن نسبة العائلات التي توافق على رفع سعر الخبز كحل لظاهرة رمي الخبز تتراوح مابين 1,14% و2,85%.

3. حساب احتمال أن لا تتجاوز نسبة العائلات التي توافق على رفع سعر الخبز ثلثي نسبة هذه العائلات في المجتمع في عينة قدرها 140 عائلة في حال كانت $p = 36\%$:

$$p\left(f \leq \frac{2}{3}.36\%\right) = p(f \leq 0{,}24) = p\left(\frac{f - E(f)}{\sqrt{v(f)}} \leq \frac{0{,}24 - 0{,}36}{\sqrt{\frac{0{,}36.0{,}64}{140}}}\right)$$
$$= p(z \leq -2{,}96) = F(-2{,}96) = 1 - F(2{,}96) = 1 - 0{,}9985$$
$$= 0{,}0015$$

حل التمرين 3:

1.تقدير بمجال نسبة المؤسسات الاستشفائية التي لا تقوم برسكلة نفاياتها في الجزائر باحتمال خطأ 5%، مع الشرح:

لدينا:

$$\alpha = 5\% \Rightarrow (1-\alpha) = \mathbf{95\%} \quad ; \quad n = 250 \quad ; \quad f = \frac{150}{250} = \mathbf{0.}6$$

$$IC(p)_{95\%} = \left[f - z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{v(f)}; f + z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{v(f)}\right]$$

$$\sqrt{v(f)} = \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} = \sqrt{\frac{0.6(0{,}4)}{250}} = \mathbf{0.031}$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0{,}05}{2}} = z_{0{,}975} = \mathbf{1,96}$$

ومنه:

$$IC(p)_{95\%} = [0{,}6 - 1{,}96\,.\,0{,}031; 0{,}6 + 1{,}96\,.\,0{,}031]$$
$$= [0{,}5392\,; 0{,}6608]$$
$$= [53{,}92\%; 66{,}08\%]$$

الشرح: بثقة قدرها 95% يمكن القول أن نسبة المؤسسات الإستشفائية التي لا تقوم برسكلة نفاياتها في الجزائر تتراوح مابين 53,92% و 66,08% .

2.حساب احتمال تكون نسبة المؤسسات الإستشفائية التي تقوم برسكلة نفاياتها في عينة من 150 مؤسسة استشفائية محصورة مابين 4% و8% أي:

$$p(0.04 \leq f \leq 0.08) = ?$$

لدينا: $n = 150 \geq 30$; $\sqrt{v(f)} = \sqrt{\frac{pq}{n}}$; $E(f) = p = 0.07$

ومنه:

$$p(0.04 \leq f \leq 0.08) = p\left(\frac{0{,}04 - 0{,}07}{\sqrt{\frac{0{,}07.0{,}93}{150}}} \leq \frac{f-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \leq \frac{0{,}08 - 0{,}07}{\sqrt{\frac{0{,}07.0{,}93}{150}}}\right)$$
$$= p(-1{,}5 \leq z \leq 0.50) = F(0{,}50) - F(-1{,}5) = F(0{,}50) - 1 + F(1{,}5)$$
$$= 0{,}6915 - 1 + 0{,}9332 = \mathbf{0{,}6247} \approx \mathbf{0{,}62}$$

3. تحديد القانون الإحتمالي للفرق بين نسبتي العينتين ومعالمه:

بما أن: $n_1 = 140$ و $n_2 = 155$ أي أن العينتين كبيرتين ≥ 30 فإن القانون الإحتمالي للفرق بين نسبتي هاتين العينتين هو **التوزيع الطبيعي** أي:

$$(f_1 - f_2) \to N\big(E(f_1 - f_2); v(f_1 - f_2)\big)$$

معالم هذا التوزيع هي:

$$E(f_1 - f_2) = E(f_1) - E(f_2) = p_1 - p_2 = 15 - 7{,}5 = \mathbf{7{,}5\%}$$

و:

$$v(f_1 - f_2) = v(f_1) + v(f_2) = \frac{p_1q_1}{n_1} + \frac{p_2q_2}{n_2} = \frac{0{,}15.\,0{,}85}{140} + \frac{0{,}075.0{,}925}{155}$$
$$= \mathbf{0{,}0013}$$

ومنه:

$$(\boldsymbol{f_1} - \boldsymbol{f_2}) \to \boldsymbol{N}(\mathbf{7{,}5}; \mathbf{0{,}0013})$$

حل التمرين 4:

1. تقدير بمجال متوسط وزن السدادات المجمعة في البلدية الواحدة بولاية ميلة ككل بدرجة مخاطرة قدرها 5% مع الشرح:

لدينا: $n = 8 < 30$ و σ^2 مجهول وعليه يكون:

$$IC(\mu)_{95\%} = \left[\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}.\frac{s}{\sqrt{n-1}}; \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}.\frac{s}{\sqrt{n-1}}\right]$$

ولدينا أيضا:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{51,2}{8} = \mathbf{6,4}$$

$$t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} = t_{1-\frac{1-0,05}{2};8-1} = t_{0,975\,;7} = \mathbf{2,36}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{0,325} = \mathbf{0,57}$$

$$\frac{s}{\sqrt{n-1}} = \frac{0,57}{\sqrt{8-1}} = \mathbf{0,2154}$$

وعليه يصبح لدينا:

$$IC(\mu)_{95\%} = [6,4 - 2,36\,.0,2154; 6,4 + 2,36\,.0,2154]$$
$$= [\mathbf{5,8916\,;6,9083}]$$

الشرح: بثقة قدرها 95% يمكن القول أن متوسط وزن السدادات المجمعة في البلدية الواحدة بولاية ميلة ككل يتراوح مابين 5,8916 و 6,9083 كلغ .

2. تحديد مجال الثقة لتباين أوزان السدادات ببلديات ولاية ميلة بدرجة ثقة قدرها 90%، ثم استنتاج مجال الثقة للإنحراف المعياري بنفس درجة الثقة مع شرح النتائج:

يعطى مجال الثقة للتباين بالصيغة التالية:

$$IC(\sigma^2)_{90\%} = \left[\frac{n.s^2}{k^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}};\frac{n.s^2}{k^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}}\right]$$

$$= \left[\frac{8.(0,57)^2}{k^2_{1-\frac{0,01}{2};8-1}};\frac{8.(0,57)^2}{k^2_{\frac{0,01}{2};8-1}}\right] = \left[\frac{2,5992}{k^2_{0,95\,;7}};\frac{2,5992}{k^2_{0,05;7}}\right]$$

$$= \left[\frac{2,5992}{14,1};\frac{2,5992}{2,17}\right] = [\mathbf{0,1843\,;1,1977}]$$

الشرح: بثقة قدرها 90% يمكن القول أن تباين أوزان السدادات المجمعة ببلديات ولاية ميلة يتراوح مابين 0,1843 و 1,1977 كلغ.

وعلى هذا الأساس فإن مجال الثقة للإنحراف المعياري عند نفس درجة الثقة يكون بأخذ الجذور التربيعية لحدود مجال الثقة للتباين كما يلي:

$$IC(\sigma)_{90\%} = \left[\sqrt{\frac{n.s^2}{k^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}}};\sqrt{\frac{n.s^2}{k^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}}}\right] = \left[\sqrt{0,1843}\,;\sqrt{1,1977}\right] = [\mathbf{0,4293\,;1,0943}]$$

3. تحديد مقدار الخطأ المحتمل ارتكابه في تقدير متوسط وزن السدادات المجمعة في هذه البلديات ككل وهذا بمستوى معنوية 10%، حيث $n = 45$، و $\sigma = 5{,}4$:

لدينا:

$$E = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} . \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = Z_{1-\frac{0{,}1}{2}} . \frac{5{,}4}{\sqrt{45}} = Z_{0{,}95} . \frac{5{,}4}{\sqrt{45}} = 1{,}64 . \frac{5{,}4}{\sqrt{45}} = \mathbf{1{,}3201}$$

4. لتحسين دقة النتائج في تقدير متوسط أوزان السدادات المجمعة في ولايتي سطيف وميلة بنسبة 34% هذا يعني تخفيض الخطأ بنفس النسبة حيث:

$$n = \left(Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \ \frac{\sigma^2}{\grave{E}^2}$$

على اعتبار أن $\grave{E}$ هو مقدار الخطأ الجديد والذي يساوي:

$$\grave{E} = E(1-0{,}34) = 1{,}3201(1-0{,}34) = \mathbf{0{,}8712}$$

ومنه:

$$n = \left(Z_{1-\frac{0{,}01}{2}}\right)^2 \ \frac{(5{,}4)^2}{(0{,}8712)^2} = \left(Z_{0{,}995}\right)^2 \left(\frac{5{,}4}{0{,}8712}\right)^2 = (2{,}58)^2 \ \left(\frac{5{,}4}{0{,}8712}\right)^2 = \mathbf{256}$$

أي أن حجم العينة اللازم في هذه الحالة هو 256 بلدية.

المحور الثالث:

إختبار الفرضيات الاحصـــائية

أولا: مفاهيم أساسية

1.مفهوم إختبار الفرضيات الإحصائية:

يعتبر موضوع **اختبار الفرضيات الاحصائية Testing of Statistical Hypothesis** الشق الأساسي الثاني لإحصاء الاستدلالي، حيث أن كافة الاجراءات التي تندرج تحت هذا الموضوع يطلق عليها أحيانا مصطلح **اختبار المعنوية Test of Significance**، والذي يعد من المواضيع الأساسية للتطبيقات الاحصائية في مختلف المجالات العملية، ويهتم هذا النوع من الاختبارات باتخاذ القرارات الاحصائية المناسبة.

وعلى هذا الأساس، تعد الاجراءات المتعلقة باختبارات المعنوية أداة أساسية من الأدوات التحليلية الاحصائية، ويعود الفضل الأول في إقتراح هذه الاجراءات لكل من **نيمان وبيرسون** عام **1930** حيث أن الاجراء المتبع في اختبار الفرضيات ينطوي على الخطوات التالية[1]:

- ✓ صياغة فرضية معينة؛
- ✓ اختبار الفرضية؛
- ✓ اتخاذ قرار بشأن الفرضية كنتيجة للاختبار.

إن أغلب الفرضيات الاحصائية تتعلق بمعلمات المجتمع الاحصائي أو التوزيعات الاحتمالية ومثال ذلك متوسط المجتمع وتباينه، والفروق بين المتوسطات والنسب، والعلاقات بين المتغيرات والظواهر المختلفة، كما أنها تتعلق بطبيعة هذه التوزيعات ونوعها.

1.1.تعريف إختبار الفرضية:

يعرف اختبار الفرضية احصائيا بأنه **أسلوب احصائي** يراد به **التأكد** من صحة الفرضية أو عدم صحتها. وعندما يعتمد هذا الأسلوب على جميع مفردات المجتمع الاحصائي فإن الاستدلال أو الاستنتاج الذي يتم التوصل إليه بشأن الفرضية يكون إما نعم أو لا. أما إذا كان الاختبار يعتمد على **مفردات العينة** التي يتم اختيارها من المجتمع الاحصائي فإن القرار الذي يتم التوصل إليه بشأن الفرضية يكون إما القبول أو الرفض باحتمالات معينة، وهذا يعني أن الأسلوب الذي يعتمد على العينة يترك مجالا لاحتمال الوقوع بالخطأ في اتخاذ القرارات.

2.1.صياغة الفرضية الاحصائية:

قبل الحديث عن موضوع صياغة الفرضية الاحصائية، ينبغي التعرف على مفهوم الفرضية الاحصائية بشكل عام والفرضية المبدئية والفرضية البديلة بشكل خاص.

[1] حسن ياسين طعمة وإيمان حسين حنوش، مرجع سبق ذكره، ص.240.

1.2.1. الفرضية الاحصائية:

هي إدعاء، تصريح أو تخمين معين قد يكون صحيحا أو خاطئا حول معلمة أو أكثر لمجتمع إحصائي أو عدد من المجتمعات الاحصائية، وتنقسم الفرضيات الاحصائية إلى نوعين هما:

أ.الفرضيات المتعلقة بمعلمات المجتمعات وتسمى **الفرضيات المعلمية Parametric Hypothesis**؛

ب.الفرضيات المتعلقة بشكل دوال التوزيعات وتسمى **بالفرضيات اللامعلمية non−parametric hypothesis**.

2.2.1. الفرضية المبدئية والفرضية البديلة:

تصاغ عادة الفرضية الاحصائية في صورة عدم وجود فروق ذات دلالة إحصائية، أو عدم وجود أثر ذو دلالة إحصائية، أو عدم وجود علاقة ذات دلالة إحصائية، حيث يطلق على هذه الفرضية مصطلح **فرضية العدم**، **الفرضية المبدئية** أو **الفرضية الصفرية Null hypothesis** ويرمز لها بـ H_0. وهي الفرضية التي نتمسك بها ولا نرفضها إلا في حالة توفر دلائل قوية من واقع العينة تستدعي رفضها. وعمليا فإن فرضية العدم هذه هي التي تكون موضع الاختبار حيث نفرض أنها صحيحة ونحاول تأكيد أو رفض هذا الأمر وهذا بناءا على دلائل العينة. ومن جهة أخرى هناك مكمل لفرضية العدم يُصطلح عليه **بالفرضية البديلة Alternative Hypothesis** يرمز لها بالرمز H_A أو H_1.[1]

وبناءا عليه يمكن القول أن **لكل مسألة فرضيتان** هما الفرضية المبدئية والفرضية البديلة، وإذا أدى الاختبار إلى رفض الفرضية المبدئية فإننا نعتبر أن الفرضية البديلة صحيحة والعكس صحيح.

2.الخطأ من النوع الأول والخطأ من النوع الثاني:

إذا أدت قاعدة القرار الموضوعة إلى رفض الفرضية المبدئية إعتمادًا على نتائج العينة رغم أنها في الحقيقة صحيحة نقول أننا ارتكبنا خطأ من النوع الأول **Type 1 Error**، في حين إذا أدت إلى قبول الفرضية المبدئية رغم أنها في الحقيقة خاطئة نقول أننا ارتكبنا خطأ من النوع الثاني**Type 2 Error**، ويمكن أن نقلل من الخطأين بتكبير حجم العينة[2]، والجدول رقم (2) يوضح الفرق بين الخطأ من النوع الأول والخطأ من التوع الثاني:

---

[1] د.شبيجل وآخرون، مرجع سبق ذكره، ص.96.

[2] François Cottet-Emard .**probabilités et tests d'hypothèse : cours et exercices corrigés**. 1er édition, Belgique ,2014 , P.340-341.

جدول رقم(2):الخطأ من النوع الأول والخطأ من النوع الثاني

القرار	الفرضية H_0 صحيحة	الفرضية H_0 خاطئة
قبول الفرضية H_0	صواب	خطأ من النوع الثاني
رفض الفرضية H_0	خطأ من النوع الأول	صواب

المصدر: سهير فهمي حجازي ومحمود الدريني. **الإحصاء التطبيقي**. الشركة المصرية لإعادة التأمين، مصر، 2004، ص. 79-80.

3.مستوى المعنوية Level of Significance:

نسمي الاحتمال الذي نكون مستعدين وفقه بالمجازفة بارتكاب خطأ من النوع الأول بمستوى المعنوية أو مستوى الدلالة، ونرمز له بالرمز α، ويحدد هذا الإحتمال قبل البدء في إجراء الإختبار أي قبل إجراء عملية المعاينة حتى لا تؤثر النتائج التي نحصل عليها في قرارنا. وفي العادة نستخدم في الحياة العملية مستويات معنوية 0,05 أو 0,01 وهذا لا يمنع من استخدام مستويات أخرى للمعنوية.[1]

4.اختبار الطرفين أو ذو جانبين:

في هذا النوع من الاختبار تأخذ قيمة واحدة بالنسبة للفرضية المبدئية، على عكس الفرضية البديلة التي تأخذ جميع القيم التي تختلف على هذه القيمة سواء بالزيادة أو بالنقصان، فعلى سبيل المثال إذاكان اختبارنا يتعلق بمتوسط المجتمع μ فإنّنا نقول أنّ الاختبار ذو جانبين إذاكان اهتمامنا منصبا على تغيرات μ في كلا الاتجاهين (<، >) من قيمة معينة μ_0 ونصيغ المسألة على النحو التالي:

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu = \mu_0 \end{cases}$$

1.4.اختبار الطرف الأيسر:

إذاكان اهتمامنا منصبا على تغيرات μ مثلا في اتجاه واحد من قيمة معينة μ_0 وكان اهتمامنا بالتغير من الجهة اليسرى فإنّ المسألة تكون على النحو التالي:

$$\begin{cases} H_0: \mu \geq \mu_0 \\ H_1: \mu < \mu_0 \end{cases}$$

2.4.اختبار الطرف الأيمن:

إذاكان اهتمامنا منصبا على تغيرات μ مثلا في اتجاه واحد من قيمة معينة μ_0 و كان اهتمامنا بالتغير من الجهة اليمنى فإنّ المسألة تكون على النحو التالي:

$$\begin{cases} H_0: \mu \leq \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{cases}$$

[1] د.شبيجل وآخرون، مرجع سبق ذكره، ص.98.

ثانيا: اختبارات مقارنة معلمة مجتمع بعدد ثابت

1. اختبارات المتوسط الحسابي للمجتمع:

1.1. اختبار الطرفين أو ذو جانبين:

نفرض أننا نريد إختبار الفرضية التي مفادها أن قيمة متوسط المجتمع هي قيمة معينة μ_0 ، أي:

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

1.1.1.إذا كان حجم العينة كبير $n \geq 30$:

لنفرض أنه تم سحب عينة حجمها $n \geq 30$ من مجتمع يتوزع بمتوسط μ ونريد اختبار الفرضية السابقة،

فإننا

نعلم مما سبق أن أفضل مقدر لمتوسط المجتمع هو متوسط العينة $\bar{x}$ ونعلم أنّ:

$$\boldsymbol{Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{v(\bar{x})}} \to N(0.1)}$$

عند مستوى دلالة α فإن قرار رفض أو عدم رفض الفرضية المبدئية H_0 يكون وفقا لقاعدة اتخاذ القرار التالية:

$$\begin{cases} \mathbf{Z} = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{v(\bar{x})}} \in \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \to \overline{\mathbf{RH_0}} \\ \mathbf{Z} = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{v(\bar{x})}} \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \to RH_0 \end{cases}$$

حيث:

أ. إذا كان تباين المجتمع معلوم فإن:

$$\sqrt{v(\bar{x})} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

ب.إذا كان تباين المجتمع مجهول فإن:

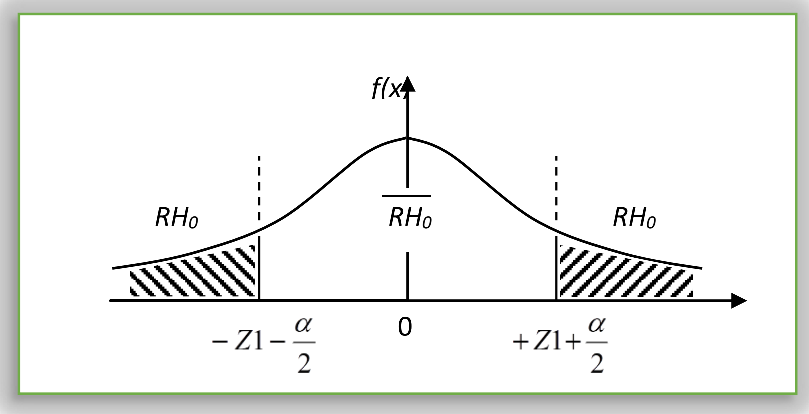
$$\sqrt{v(\bar{x})} = \sqrt{\frac{S^2}{n-1}}$$

علما أن:

$$\boxed{s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

وبناءا عليه فإن قرار رفض أو عدم رفض الفرضية المبدئية في حالة الإختبار ذو جانبين يكون كما هو موضح في الشكل رقم (7) فيما يلي:

شكل رقم (7): إختبار ذوجانبين



المصدر: من إعداد الباحثة

حيث تمثل $\overline{RH_0}$ منطقة **عدم الرفض** لـ H_0، في حين تمثل RH_0 منطقة الرفض لـ H_0.

مثال:

الفترة المعيشية لجهاز كهربائي هي 1750 ساعة مع انحراف معياري قدره 120 ساعة. و قد تم الحصول على هذه النتائج عن طريق عينة عشوائية حجمها 101 جهاز إذا كان μ يمثل الفترة الوسطية المعيشية للأجهزة المنتجة في المؤسسة. و**المطلوب**: اختبر الفرضية التالية عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$.

$$\begin{cases} H_0: \mu = 1600 \\ H_1: \mu \neq 1600 \end{cases}$$

الحل:

لدينا مجتمع غير محدود و $n = 101$، ونعلم أنه في حالة عينة كبيرة فإن قاعدة اتخاذ القرار تكون على النحو التالي:

$$\begin{cases} Z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{v(\bar{x})}} \in \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \rightarrow \overline{RH_0} \\ Z = \dfrac{x - \mu_0}{\sqrt{v(\bar{x})}} \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \rightarrow RH_0 \end{cases}$$

ولدينا أيضا:

$$\mu_0 = 1600 \quad ; \quad \bar{x} = 1750$$

من جدول التوزيع الطبيعي نجد:

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.975} = 1.96$$

ومن جهة أخرى وبالتطبيق العددي للمعطيات نجد:

$$\sqrt{v(\bar{x})} = \frac{s}{\sqrt{n-1}} = \frac{120}{\sqrt{101-1}} = \mathbf{12}$$

و:

$$Z = \frac{1750 - 1600}{12} = \mathbf{12.5}$$

و:

$$\left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = [\mathbf{-1.96; 1.96}]$$

وبذلك يكون:

$$\mathbf{12.5 \notin [-1.96; 1.96]}$$

أي أن:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{v(\bar{x})}} \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \rightarrow \boldsymbol{RH_0}$$

هذا يعني أن القرار هو **رفض الفرضية المبدئية $\mathbf{H_0}$** عند مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$، أي أننا لا نقبل أن الفترة الوسطية المعيشية للأجهزة الكهربائية هي 1600 سا.

2.1.1. إذا كان حجم العينة صغير $n < 30$:

لنفرض أننا سحبنا عينة عشوائية حجمها $n < 30$ من مجتمع غير محدود يتوزع توزيع طبيعي بمتوسط μ وتباين σ^2 مجهولين. وفي هذه الحالة نعلم مما سبق أنّ:

$$\boldsymbol{T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{s^2}{n-1}}} \rightarrow t_{n-1}}$$

عند مستوى دلالة α فإن قرار رفض أو عدم رفض الفرضية المبدئية H_0 تحت هذه الشروط يكون وفقا لقاعدة اتخاذ القرار التالية:

$$\begin{cases} \boldsymbol{T} = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{s^2}{n-1}}} \in \left[-t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}; +t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\right] \rightarrow \overline{RH_0} \\ \boldsymbol{T} = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{s^2}{n-1}}} \notin \left[-t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}; +t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\right] \rightarrow RH_0 \end{cases}$$

مثال:

قمنا بسحب عينة حجمها $n = 17$ من مجتمع غير محدود يتوزع توزيع طبيعي بمتوسط وتباين مجهولين فوجدنا أن: $\bar{x} = 11, \quad S = 2$.

عند مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$ اختبر صحة الفرضية التالية:

$$\begin{cases} H_0: \mu = 10 \\ H_1: \mu \neq 10 \end{cases}$$

الحل:

لدينا مجتمع غير محدود بالإضافة إلى:

$$\bar{x} = 11 \quad , \quad S = 2 \quad , \quad n = 17 \quad , \quad \alpha = 5\%$$

ونعلم أنه في حالة عينة صغيرة فإن قاعدة اتخاذ القرار تكون كما يلي:

$$\begin{cases} T = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{s^2}{n-1}}} \in \left[-t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}; +t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\right] \rightarrow \overline{RH_0} \\ T = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{s^2}{n-1}}} \notin \left[-t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}; +t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\right] \rightarrow RH_0 \end{cases}$$

من جدول توزيع ستيودنت نجد :

$$t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} = t_{16;0.975} = 2.12$$

ومن جهة أخرى فإن:

$$\frac{s}{\sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{17-1}} = 0.5$$

وبذلك يكون:

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{s^2}{n-1}}} = \frac{11-10}{0.5} = 2$$

ومنه:

$$\left[-t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}; t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\right] = [-2.12; +2.12]$$

وبما أن $2 \in [-2.12; +2.12]$ فإننا لا نرفض H_0، أي أن القرار هو $\overline{RH_0}$ وبذلك نعتبر أن متوسط المجتمع **يساوي** فعلا **10**.

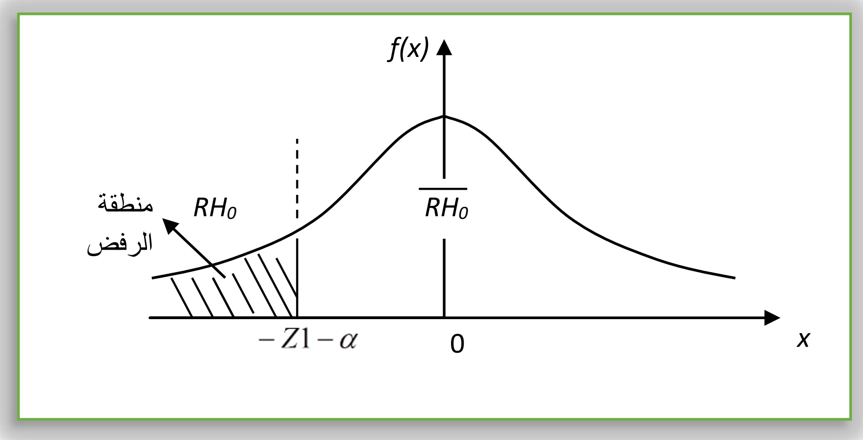
2.1. اختبار ذو طرف أيسر:

لنفرض أنه تم سحب عينة حجمها $n \geq 30$ من مجتمع يتوزع بمتوسط μ ونريد اختبار الفرضية التالية:

$$\begin{cases} H_0: \mu \geq \mu_0 \\ H_1: \mu < \mu_0 \end{cases}$$

إذا كان الاختبار ذو طرف أيسر فإن منطقتي الرفض والقبول تكونان كما هو موضح في الشكل رقم (8):

شكل رقم (8): منطقتي القبول والرفض في الاختبار ذو الطرف الأيسر



المصدر: من إعداد الباحثة

عند مستوى دلالة α فإن قرار رفض أو عدم رفض الفرضية المبدئية H_0 يكون وفقا لقاعدة اتخاذ القرار التالية:

$$\begin{cases} \mathbf{Z} = \dfrac{\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}_0}{\sqrt{\boldsymbol{v}(\overline{\boldsymbol{x}})}} \geq -\boldsymbol{Z}_{1-\propto} \rightarrow \overline{\boldsymbol{RH}_0} \\ \mathbf{Z} = \dfrac{\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}_0}{\sqrt{\boldsymbol{v}(\overline{\boldsymbol{x}})}} < -\boldsymbol{Z}_{1-\propto} \rightarrow \boldsymbol{RH}_0 \end{cases}$$

ملاحظة:

إذا كانت $\boldsymbol{n} < \mathbf{30}$ فإن قاعدة اتخاذ القرار تكون كما يلي:

$$\begin{cases} \boldsymbol{T} = \dfrac{\overline{\boldsymbol{x}} - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{\boldsymbol{s}^2}{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}}} \geq -t_{n-1;1-\propto} \rightarrow \overline{\mathbf{RH}_0} \\ \boldsymbol{T} = \dfrac{\overline{\boldsymbol{x}} - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{\boldsymbol{s}^2}{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}}} < -t_{n-1;1-\propto} \rightarrow \boldsymbol{RH}_0 \end{cases}$$

3.1.اختبار ذو طرف أيمن:

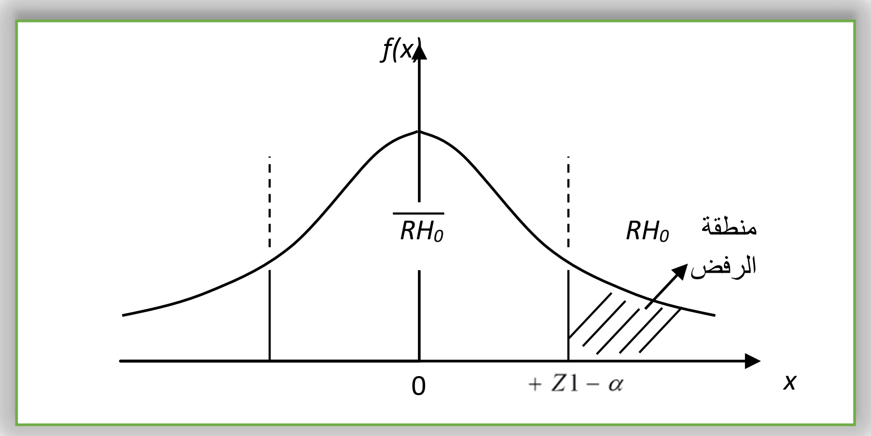
1.3.1. إذا كان حجم العينة كبير $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{30}$:

لنفرض أنه تم سحب عينة حجمها $n \geq 30$ من مجتمع يتوزع بمتوسط μ ونريد اختبار الفرضية :

$$\begin{cases} H_0: \mu \leq \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{cases}$$

إذا كان الاختبار ذو طرف أيمن فإن منطقتي الرفض والقبول تكونان كما هو موضح في الشكل رقم(**9**):

شكل رقم(9): منطقتي القبول والرفض في الاختبار ذو الطرف الأيمن



المصدر: من إعداد الباحثة

عند مستوى دلالة α فإن قرار رفض أو عدم رفض الفرضية المبدئية H_0 يكون وفقا لقاعدة اتخاذ القرار التالية:

$$\begin{cases} Z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{v(\bar{x})}} \leq +Z_{1-\alpha} \rightarrow \overline{\mathbf{RH_0}} \\ Z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{v(\bar{x})}} > +Z_{1-\alpha} \rightarrow \boldsymbol{RH_0} \end{cases}$$

2.3.1. إذا كان حجم العينة صغير $n < 30$:

إذا كانت $n < 30$ فإن قاعدة اتخاذ القرار تكون كما يلي:

$$\begin{cases} \boldsymbol{T} = \dfrac{\bar{\boldsymbol{x}} - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{\boldsymbol{s^2}}{\boldsymbol{n-1}}}} \leq +t_{n-1;1-\alpha} \rightarrow \overline{\mathrm{RH_0}} \\ \boldsymbol{T} = \dfrac{\bar{\boldsymbol{x}} - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{\boldsymbol{s^2}}{\boldsymbol{n-1}}}} > +t_{n-1;1-\alpha} \rightarrow RH_0 \end{cases}$$

2.اختبارات النسبة p :

إذا كان الاختبار ذو طرفين كما في الفرضية التالية:

$$\begin{cases} H_0: p = p_0 \\ H_1: p \neq p_0 \end{cases}$$

فعند مستوى دلالة α يكون قرار رفض أو عدم رفض الفرضية المبدئية H_0 وفقا لقاعدة اتخاذ القرار التالية:

$$\begin{cases} Z = \dfrac{f - p_0}{\sqrt{v(f)}} \in \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \rightarrow \overline{RH_0} \\ Z = \dfrac{f - p_0}{\sqrt{v(f)}} \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \rightarrow RH_0 \end{cases}$$

مع العلم أن:

$$\boxed{v(f) = \frac{p_0(1 - p_0)}{n}}$$

ملاحظة1:

إذا كان الاختبار **ذو طرف أيسر** فعند مستوى دلالة معين $\propto$ يُبنى القرار حسب قاعدة اتخاذ القرار التالية:

$$\begin{cases} Z = \dfrac{f - p_0}{\sqrt{v(f)}} \geq -Z_{1-\alpha} \rightarrow \overline{RH_0} \\ Z = \dfrac{f - p_0}{\sqrt{v(f)}} < -Z_{1-\alpha} \rightarrow RH_0 \end{cases}$$

ملاحظة2:

إذا كان الاختبار **ذو طرف أيمن** فعند مستوى دلالة معين $\propto$ يُبنى القرار حسب قاعدة اتخاذ القرار التالية:

$$\begin{cases} Z = \dfrac{f - p_0}{\sqrt{v(f)}} \leq +Z_{1-\alpha} \rightarrow \overline{RH_0} \\ Z = \dfrac{f - p_0}{\sqrt{v(f)}} > +Z_{1-\alpha} \rightarrow RH_0 \end{cases}$$

مثال:

أعلنت مؤسسة أن 95% من منتجاتها صالحة للاستعمال طبقا للمعايير المعمول بها عالميا، عند دراسة لعينة حجمها 200 اتضح أن 18 منتوج غير مقبول. و**المطلوب**: اختبر الفرضية التالية عند مستوى دلالة 5%:

$$\begin{cases} H_0: p = 0.06 \\ H_1: p \neq 0.06 \end{cases}$$

الحل:

لدينا: $n = 200 \qquad \alpha = 0.05$

$$r = 18 \rightarrow f = \frac{r}{n} = \frac{18}{200} \rightarrow f = \mathbf{0.09}$$

قاعدة اتخاذ القرار هي:

$$\begin{cases} \mathbf{Z = \frac{f - p_0}{\sqrt{v(f)}} \in \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\,; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \rightarrow \overline{RH_0}} \\ \mathbf{Z = \frac{f - p_0}{\sqrt{v(f)}} \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\,; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \rightarrow RH_0} \end{cases}$$

لدينا:

$$Z_{1-\alpha/_2} = Z_{0.025} = Z_{0.975} = \mathbf{1.96}$$

$$\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} = \sqrt{\frac{0.06 \times 0.94}{200}} = \mathbf{0.017}$$

ومنه:

$$Z = \frac{f - p_0}{\sqrt{v(f)}} = \frac{0.09 - 0.06}{0.017} = \mathbf{1.7647}$$

$$\left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}.\,; +Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = [-1.96; +1.96]$$

بما أنّ:

$$1.7647 \in [-1.96; +1.96]$$

فإننا لا نرفض الفرضية H_0، أي أن القرار هو $\overline{RH_0}$ عند مستوى معنوية 5% مما يعني أننا لا نقبل أن نسبة المنتوج غير المقبول هو 6 %.

ثالثا: تمارين مقترحة حول المحور الثالث

التمرين1:

في دراسة حول أسباب هجرة الأطباء بالجزائر اجريت دراسة استطلاعية لآراء عينة من الأطباء بكل من القطاع الخاص والعمومي حول الموضوع حجمها 900 طبيب فوجد أن متوسط عدد الأطباء الذين يرجعون أسباب الهجرة إلى ظروف العمل الصعبة في هذه العينة هو 400 طبيب علما أن متغير الدراسة هنا يتبع التوزيع الطبيعي بإنحراف معياري قدره 50. **والمطلوب:**

1. هل متوسط عدد الأطباء الذين يرجعون أسباب الهجرة إلى ظروف العمل الصعبة يفوق 500 طبيب عند مستوى دلالة 1%.

2.هل متوسط عدد الأطباء الذين يرجعون أسباب الهجرة إلى ظروف العمل الصعبة يقل عن 500 طبيب عند مستوى دلالة 5%.

التمرين2:

صرحت الجهات الرسمية أن نسبة المتخرجين من الجامعة الذين يحصلون على عمل في السنة الأولى التي تلي تخرجهم هي 70 %. للتأكد من صحة هذا التصريح تم سحب عينة حجمها 900 طالب متخرج فوجد أن نسبة الحصول على عمل في السنة الأولى التي تلي تخرجهم هي 67%. **والمطلوب:** اختبر صحة هذا التصريح عند مستوى معنوية 1%.

التمرين3:

تدعي إحدى القنوات الإخبارية بالجزائر أن نسبة الأطفال المصابين بالتوحد لا تتجاوز 5%، وبغرض متابعة الموضوع تم أخذ عينة من 80 طفل فوجد أن 6 أطفال منهم مصابين بهذا المرض. **والمطلوب:** عند مستوى دلالة 1% اختبر صحة ادعاء هذه القناة الاخبارية.

التمرين4:

تدعي إدارة أحد المصانع لصناعة نوع معين من الأنابيب المعدنية بأن الوسط الحسابي لطول قطر الأنابيب المصنعة في هذا المصنع مطابق للمواصفات ويساوي 2 سم وللتأكد من صحة قوله سحبت عينة عشوائية من الانتاج الكلي تحتوي على 35 أنبوب معدني فكانت أطوال أقطارها كما يلي:

1.89	1.94	1.97	1.99	1.95	1.85	1.84	1.9	2
2.04	2.05	1.9	1.95	1.96	1.97	2	2.11	2.1
2.12	2.09	2.07	2.06	1.98	1.94	1.93	1.9	2.02
_	2.03	1.98	1.92	2.1	2.08	1.9	1.9	1.89

حيث: $\sum_{i=1}^{35}(x_i-\bar{x})^2 = 2.7335$

إذا علمت أن أطوال أقطار الأنابيب تتوزع طبيعيا **فالمطلوب:** اختبر صحة إدعاء إدارة هذا المصنع عند مستوى معنوية 0.05.

التمرين5:

قامت إحدى الشركات باستيراد شحنة كبيرة من الأجهزة الكهرومنزلية وقد تعهدت الشركة المصدرة لهذه الأجهزة بأن لا تزيد نسبة الأجهزة المعيبة في الشحنة عن 3%، تم اختيار عينة عشوائية من 50 جهاز من هذه الشحنة فتبين وجود 2 جهاز معيب. **والمطلوب:** هل يمكن القول عند مستوى معنوية 1% أن الشركة المصدرة للأجهزة الكهرومنزلية قد إلتزمت بتعهدها؟

التمرين6:

تلقت مؤسسة شحنة من الإطارات المطاطية للسيارات وترغب في تقدير متوسط مدة حياة هذه الإطارات لأجل ذلك تم سحب عينة مكونة من 25 إطار مطاطي فتم التوصل إلى أن مدة حياتها مجتمعة تساوي 987000 كلم علما أن مدة حياة هذه الإطارات عبارة عن متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي، بالإضافة إلى أن: $\sum_{i=1}^{25}(x_i-\bar{x})^2 = 153600$. تدعي المؤسسة المصنعة لهذه الإطارات أن متوسط مدة حياة الإطارات المطاطية في الشحنة هي 42000 كلم، **والمطلوب:** اختبر مدى صحة هذا الإدعاء عند مستوى ثقة 95%.

رابعا: حل التمارين المقترحة حول المحور الثالث

حل التمرين 1:

1. هل متوسط عدد الأطباء الذين يرجعون أسباب الهجرة إلى ظروف العمل الصعبة يفوق 500 طبيب عند مستوى دلالة 1% ؟ أي أنه هنا يُراد اختبار الفرضية التالية:

$$\begin{cases} H_0: \mu \leq 500 \\ H_1: \mu > 500 \end{cases}$$

نلاحظ أن الاختبار هنا ذو جانب أيمن و $n \geq 30$ ومنه فإن قاعدة إتخاذ القرار تكون على النحو التالي:

$$\begin{cases} Z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{v(\bar{x})}} \leq +Z_{1-\alpha} \rightarrow \overline{\mathbf{RH_0}} \\ Z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{v(\bar{x})}} > +Z_{1-\alpha} \rightarrow \boldsymbol{RH_0} \end{cases}$$

لدينا:

$$\bar{x} = 400 \quad ; \quad \sigma = 50 \quad ; \quad \mu_0 = 500 \quad ; \quad n = 900$$

$$\sqrt{v(\bar{x})} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{50}{\sqrt{900}} = \frac{50}{30} = \mathbf{1,6667}$$

$$Z_{1-\alpha} = Z_{1-0,01} = Z_{0,99} = \mathbf{2,3263}$$

$$Z = \frac{400 - 500}{1,6667} = \mathbf{-59,9988}$$

نلاحظ أن:

$$Z = \mathbf{-59,9988} \leq Z_{1-\alpha} = \mathbf{2,3263} \rightarrow \overline{\mathbf{RH_0}}$$

أي أن القرار هو **عدم رفض** $\boldsymbol{H_0}$ بمعنى أن متوسط عدد الأطباء الذين يرجعون أسباب الهجرة إلى ظروف العمل الصعبة لا يفوق 500 طبيب.

2.هل متوسط عدد الأطباء الذين يرجعون أسباب الهجرة إلى ظروف العمل الصعبة يقل عن 500 طبيب عند مستوى دلالة 5% ؟ في هذه الحالة يراد إختبار الفرضيات التالية:

$$\begin{cases} H_0: \mu \geq 500 \\ H_1: \mu < 500 \end{cases}$$

ويصبح الإختبار هنا ذو جانب أيسر و $n \geq 30$ أيضا وبذلك تكون قاعدة إتخاذ القرار على النحو التالي:

$$\begin{cases} Z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{v(\bar{x})}} \geq -Z_{1-\alpha} \rightarrow \overline{\mathbf{RH_0}} \\ Z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{v(\bar{x})}} < -Z_{1-\alpha} \rightarrow \boldsymbol{RH_0} \end{cases}$$

لدينا:

$$Z = \frac{400 - 500}{1,6667} = \mathbf{-59,9988}$$

$$-Z_{1-\propto} = Z_{1-0,05} = Z_{0,95} = \mathbf{-1,6449}$$

نلاحظ أن:

$$Z = \mathbf{-59,9988} < -Z_{1-\propto} = \mathbf{-1,6449} \rightarrow \boldsymbol{RH_0}$$

أي أن القرار هو **رفض الفرضية المبدئية** H_0 بمعنى أن متوسط عدد الأطباء الذين يرجعون أسباب الهجرة إلى ظروف العمل الصعبة يقل تماما عن 500 طبيب.

حل التمرين 2:

يمكن صياغة الفرضيات التالية:

$$\begin{cases} H_0: p = 70\% \\ H_1: p \neq 70\% \end{cases}$$

الإختبار هنا ذو جانبين و $n = 900 \geq 30$ وعليه تكون قاعدة إتخاذ القرار في هذه الحالة كما يلي:

$$\begin{cases} \mathbf{Z} = \dfrac{\boldsymbol{f - p_0}}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} \in \left[\boldsymbol{-Z_{1-\frac{\propto}{2}}}; \boldsymbol{+Z_{1-\frac{\propto}{2}}}\right] \rightarrow \overline{\mathbf{RH_0}} \\ \mathbf{Z} = \dfrac{\boldsymbol{f - p_0}}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} \notin \left[\boldsymbol{-Z_{1-\frac{\propto}{2}}}; \boldsymbol{+Z_{1-\frac{\propto}{2}}}\right] \rightarrow \boldsymbol{RH_0} \end{cases}$$

لدينا:

$$n = 900 \quad ; \quad p_0 = 70\% = \mathbf{0,7} \quad ; \quad f = 67\% = \mathbf{0,67}$$

$$\mathbf{Z} = \frac{f - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.67 - 0,7}{\sqrt{\dfrac{0,7(1-0,7)}{900}}} = \mathbf{-1,9736}$$

$$Z_{1-\frac{\propto}{2}} = Z_{1-\frac{0,01}{2}} = Z_{0,995} = \mathbf{2,5758} \Rightarrow \left[-Z_{1-\frac{\propto}{2}}; +Z_{1-\frac{\propto}{2}}\right] = [\mathbf{-2,5758}\,; \mathbf{+2,5758}]$$

نلاحظ أن :

$$\mathbf{Z} = \mathbf{-1,9736} \in \left[-Z_{1-\frac{\propto}{2}}; +Z_{1-\frac{\propto}{2}}\right] = [-2,5758\,; +2,5758] \rightarrow \overline{\mathbf{RH_0}}$$

أي أن القرار هو **عدم رفض الفرضية المبدئية** H_0 بمعنى أن تصريح الجهات الرسمية صحيح والذي ينص على أن نسبة المتخرجين من الجامعة الذين يحصلون على عمل في السنة الأولى التي تلي تخرجهم هي 70%.

حل التمرين3:

نريد اختبار الفرضية التالية:

$$\begin{cases} H_0: p \leq 5\% \\ H_1: p > 5\% \end{cases}$$

نلاحظ أن الاختبار هنا ذو جانب أيمن و $n \geq 30$ ومنه فإن قاعدة إتخاذ القرار تكون على النحو التالي:

$$\begin{cases} Z = \dfrac{f - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} \leq +Z_{1-\propto} \rightarrow \overline{\mathbf{RH_0}} \\ Z = \dfrac{f - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} > +Z_{1-\propto} \rightarrow \boldsymbol{R}\mathbf{H_0} \end{cases}$$

لدينا:

$$f = \frac{6}{80} = 75\% \qquad ; \qquad p_0 = 5\% \quad ; \quad n = 80$$

$$Z_{1-\propto} = Z_{1-0,01} = Z_{0,99} = \mathbf{2,3263}$$

$$Z = \frac{0.075 - 0.05}{\sqrt{\dfrac{0,05(1-0,05)}{80}}} = \mathbf{1,026}$$

نلاحظ أن:

$$Z = \mathbf{1,026} \leq Z_{1-\propto} = \mathbf{2,3263} \rightarrow \overline{\boldsymbol{R}\mathbf{H_0}}$$

أي أن القرار هو **عدم رفض الفرضية المبدئية** H_0 بمعنى أن إدعاء هذه القناة الإخبارية صحيح والذي مفاده أن نسبة الأطفال المصابين بالتوحد في الجزائر لا تتجاوز 5%.

حل التمرين4:

نريد اختبار صحة الفرضية التالية:

$$\begin{cases} H_0: \mu = 2 \\ H_1: \mu \neq 2 \end{cases}$$

بما أن $n = 35 \geq 30$ و الإختبار ذو جانبين فإن قاعدة إتخاذ القرار هي:

$$\begin{cases} \mathbf{Z} = \dfrac{\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu_0}}{\sqrt{\boldsymbol{v}(\overline{\boldsymbol{x}})}} \in \left[-\boldsymbol{Z}_{1-\frac{\propto}{2}}.; +\boldsymbol{Z}_{1-\frac{\propto}{2}}\right] \rightarrow \overline{\mathbf{RH_0}} \\ \mathbf{Z} = \dfrac{\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu_0}}{\sqrt{\boldsymbol{v}(\overline{\boldsymbol{x}})}} \notin \left[-\boldsymbol{Z}_{1-\frac{\propto}{2}}.; +\boldsymbol{Z}_{1-\frac{\propto}{2}}\right] \rightarrow \boldsymbol{R}\mathbf{H_0} \end{cases}$$

حيث σ^2 مجهول وعليه:

$$\boldsymbol{v(\bar{x}) = \frac{s}{\sqrt{n-1}}}$$

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{69,32}{35} = \mathbf{1,98}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{2,7335}{35}} = 0,28$$

$$v(\bar{x}) = \frac{0,28}{\sqrt{35-1}} = \mathbf{0,048}$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0,05}{2}} = Z_{0,975} = 1,96 \Rightarrow \left[-Z_{1-\frac{\propto}{2}}.;+Z_{1-\frac{\propto}{2}}\right] = [\mathbf{-1,96.;+1,96}]$$

$$\mathrm{Z} = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sqrt{v(\bar{x})}} = \frac{1,98-2}{\sqrt{0,048}} = \frac{-0,02}{0,219} = \mathbf{-0,0913}$$

ونلاحظ أن:

$$\mathrm{Z} = \mathbf{-0,0913} \in \left[-Z_{1-\frac{\propto}{2}}.;+Z_{1-\frac{\propto}{2}}\right] = [-1,96.;+1,96] \to \overline{\mathbf{RH_0}}$$

أي أن القرار هو **عدم رفض الفرضية المبدئية $\mathbf{H_0}$** مما يعني أن إدعاء إدارة هذا المصنع صحيح بأن الوسط الحسابي لطول قطر الأنابيب التي يصنعها مطابق للمواصفات ويساوي 2 سم.

حل التمرين5:

لإختبار مدى التزام الشركة بتعهدها نقوم بصياغة الفرضيات التالية:

$$\begin{cases} H_0: p \leq 3\% \\ H_1: p > 3\% \end{cases}$$

الإختبار ذو جانب أيمن وعليه قاعدة اتخاذ القرار هي:

$$\begin{cases} Z = \dfrac{f-p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} \leq +Z_{1-\propto} \to \overline{\mathbf{RH_0}} \\ Z = \dfrac{f-p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} > +Z_{1-\propto} \to \boldsymbol{RH_0} \end{cases}$$

لدينا:

$$f = \frac{2}{50} = \mathbf{0,04} \quad ; \quad p_0 = 3\%$$

$$Z = \frac{f-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0,04-0,03}{\sqrt{\frac{0,03(0,97)}{50}}} = \mathbf{0.4145}$$

$$Z_{1-\propto} = Z_{1-0,01} = Z_{0,99} = \mathbf{2,3263}$$

بما أن:

$$Z = \mathbf{0.4145} \leq Z_{1-\propto} = \mathbf{2,3263} \rightarrow \overline{\mathbf{RH_0}}$$

أي أن القرار هو عدم رفض الفرضية المبدئية مما يدل أن الشركة قد إلتزمت بتعهدها.

حل التمرين6:

لإختبار صحة إدعاء الشركة نقوم بصياغة الفرضيات التالية:

$$\begin{cases} H_0: \mu = 42000 \\ H_1: \mu \neq 42000 \end{cases}$$

بما أن حجم العينة صغير $n = 25 < 30$ والإختبار ذو جانبين فإن قاعدة إتخاذ القرار تعطى بالصيغة التالية:

$$\begin{cases} \boldsymbol{T} = \dfrac{\boldsymbol{\bar{x}} - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{\boldsymbol{s^2}}{\boldsymbol{n-1}}}} \in \left[-t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}; +t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}\right] \rightarrow \overline{\mathrm{RH}_0} \\ \boldsymbol{T} = \dfrac{\boldsymbol{\bar{x}} - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{\boldsymbol{s^2}}{\boldsymbol{n-1}}}} \notin \left[-t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}; +t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}\right] \rightarrow R\mathrm{H}_0 \end{cases}$$

لدينا:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{987000}{25} = \mathbf{39480} \quad ; \quad \mu_0 = \mathbf{42000}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{153600}{25} = \mathbf{6144} \Rightarrow \sqrt{\frac{s^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{6144}{25-1}} = \sqrt{256} = \mathbf{16}$$

وبذلك يكون:

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{s^2}{n-1}}} = \frac{39480 - 42000}{16} = -\mathbf{157,5}$$

لدينا أيضا:

$$t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} = t_{1-\frac{0,05}{2};25-1} = t_{0,975\,;24} = \mathbf{2,06}$$

أي أن:

$$\left[-t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}; +t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}\right] = [-\mathbf{2,06}\,; +\mathbf{2,06}]$$

نلاحظ أن:

$$T = -\mathbf{157,5} \notin \left[-t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}; +t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}\right] = [-\mathbf{2,06}\,; +\mathbf{2,06}] \rightarrow \boldsymbol{RH_0}$$

أي أن القرار هنا هو رفض الفرضية المبدئية $\mathbf{H_0}$ مما يعني أن إدعاء هذه الشركة كاذب وغير صحيح.

الملاحـــــــق:

الملحق رقم (1): جدول التــوزيـــع الطبيعي المعياري1

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5476	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.8366	0.6406	0.5443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6735	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	07422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	07734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8506	0.8531	0.8554	0.8577	0.8598	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	08962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9043	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9866	0.9871	0.9875	0.9876	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9915
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9978	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

z	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.8	4.0	4.5
F(z)	0.99865	0.999032	0.999513	0.999517	0.999563	0.999767	0.999941	0.999926	0.999968	0.999997

ملحق رقم (1): جدول التـــوزيـــــع الطبيعي المعياري2

p	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010	
0.00	-	3.0902	2.8782	2.7478	2.6521	2.5758	2.5121	2.4573	2.4089	2.3656	2.3263	0.99
0.01	2.3263	2.2904	2.2571	2.2262	2.1973	2.1701	2.1444	2.1201	2.0969	2.0749	2.0537	0.98
0.02	2.0537	2.0335	2.0141	1.9954	1.9774	1.9600	1.9431	1.9266	1.9110	1.8957	1.8808	0.97
0.03	1.8808	1.8663	1.8522	1.8364	1.8250	1.6119	1.7991	1.7868	1.7744	1.7624	1.7507	0.96
0.04	1.7507	1.7392	1.7279	1.7169	1.7060	1.6954	1.6849	1.6747	1.6646	1.6546	1.6449	0.95
0.05	1.6449	1.6352	1.6258	1.6164	1.6072	1.5982	1.5893	1.5805	1.5716	1.5632	1.5548	0.94
0.06	1.5548	1.5464	1.5382	1.5301	1.5220	1.5141	1.5063	1.4985	1.4908	1.4833	1.4758	0.93
0.07	1.4758	1.4684	1.4611	1.4538	1.4466	1.4396	1.4325	1.4265	1.4187	1.4118	1.4051	0.92
0.08	1.4051	1.3984	1.3917	1.3852	1.3787	1.3722	1.3658	1.3585	1.3532	1.3469	1.3408	0.91
0.09	1.3408	1.3346	1.3285	1.3225	1.3165	1.3108	1.3047	1.2988	1.2930	1.2873	1.2816	0.90
0.10	1.2816	1.2759	1.2702	1.2646	1.2591	1.2536	1.2481	1.2426	1.2372	1.2319	1.2265	0.89
0.11	1.2265	1.2212	1.2160	1.2107	1.2055	1.2004	1.1952	1.1901	1.1850	1.1880	1.1750	0.88
0.12	1.1750	1.1700	1.1650	1.1601	1.1552	1.1503	1.1455	1.1407	1.1359	1.1311	1.1264	0.87
0.13	1.1264	1.1217	1.1170	1.1123	1.1077	1.1031	1.0985	1.0939	1.0893	1.0848	1.0803	0.86
0.14	1.0803	1.0758	1.0714	1.0669	1.0625	1.0581	1.0537	1.0454	1.0450	1.0407	1.0364	0.85
0.15	1.0364	1.0322	1.0279	1.0237	1.0194	1.0152	1.0110	1.0069	1.0027	0.9986	0.9945	0.84
0.16	0.9945	0.9904	0.9863	0.9822	0.9782	0.9741	0.9701	0.9661	0.9621	0.9581	0.9542	0.83
0.17	0.9542	0.9502	0.9463	0.9424	0.9385	0.9346	0.9307	0.9269	0.9230	0.9192	0.9154	0.82
0.18	0.9154	0.9116	0.9078	0.9040	0.9002	0.8965	0.8927	0.8890	0.8853	0.8816	0.8779	0.81
0.19	0.8779	0.8742	0.8705	0.8669	0.8633	0.8596	0.8560	0.8524	0.8488	0.8452	0.8416	0.80
0.20	0.8416	0.8381	0.8345	0.8310	0.8274	0.8239	0.8204	0.8169	0.8134	0.8099	0.8064	0.79
0.21	0.8064	0.8030	0.7995	0.7961	0.7926	0.7892	0.7868	0.7824	0.7790	0.7756	0.7722	0.78
0.22	0.7722	0.7688	0.7655	0.7621	0.7588	0.7554	0.7521	0.7488	0.7454	0.7421	0.7388	0.77
0.23	0.7388	0.7366	0.7323	0.7290	0.7257	0.7226	0.7192	0.7160	0.7128	0.7095	0.7063	0.76
0.24	0.7063	0.7031	0.6999	0.6967	0.6935	0.6903	0.6871	0.6840	0.6808	0.6776	0.6745	0.75
0.25	0.6745	0.6713	0.6682	0.6651	0.6620	0.6588	0.6567	0.6528	0.6495	0.6464	0.6433	0.74
0.26	0.6433	0.6403	0.6372	0.6341	0.6311	0.6280	0.6250	0.6219	0.6189	0.6158	0.6128	0.73
0.27	0.6128	0.6098	0.6068	0.6038	0.6008	0.5978	0.5948	0.5918	0.5888	0.5858	0.5828	0.72
0.28	0.5828	0.5799	0.5769	0.5740	0.5710	0.5681	0.5651	0.5622	0.5592	0.5563	0.5534	0.71
0.29	0.5534	0.5505	0.5476	0.5446	0.5417	0.5388	0.5369	0.5330	0.5302	0.5273	0.5244	0.70
0.30	0.5244	0.5215	0.5187	0.5158	0.5129	0.5101	0.5072	0.5044	0.5016	0.4987	0.4956	0.69
0.31	0.4959	0.4930	0.4902	0.4874	0.4845	0.4817	0.4789	0.4761	0.4733	0.4705	0.4677	0.68
0.32	0.4677	0.4649	0.4621	0.4593	0.4565	0.4536	0.4510	0.4482	0.4454	0.4427	0.4399	0.67
0.33	0.4399	0.4372	0.4344	0.4316	0.4289	0.4261	0.4234	0.4207	0.4179	0.4152	0.4125	0.66
0.34	0.4125	0.4097	0.4070	0.4043	0.4016	0.3989	0.3961	0.3834	0.3907	0.3880	0.3853	0.65
0.35	0.3853	0.3826	0.3799	0.3772	0.3745	0.3719	0.3692	0.3665	0.3638	0.3611	0.3585	0.64
0.36	0.3585	0.3558	0.3531	0.3505	0.3478	0.3451	0.3425	0.3398	0.3372	0.3345	0.3319	0.63
0.37	0.3319	0.3292	0.3266	0.3239	0.3213	0.3186	0.3160	0.3134	0.3107	0.3081	0.3055	0.62
0.38	0.3055	0.3029	0.3002	0.2979	0.2950	0.2924	0.2898	0.2871	0.2845	0.2819	0.2793	0.61
0.39	0.2793	0.2767	0.2741	0.2715	0.2689	0.2663	0.2637	0.2611	0.2585	0.2559	0.2533	0.60
0.40	0.2533	0.2508	0.2482	0.2466	0.2430	0.2404	0.2378	0.2353	0.2327	0.2301	0.2275	0.59
0.41	0.2275	0.2250	0.2224	0.2198	0.2173	0.2147	0.2121	0.2095	0.2070	0.2045	0.2019	0.58
0.42	0.2019	0.1993	0.1968	0.1942	0.1917	0.1891	0.1866	0.1840	0.1815	0.1789	0.1764	0.57
0.43	0.1764	0.1738	0.1713	0.1687	0.1662	0.1637	0.1611	0.1588	0.1560	0.1535	0.1510	0.56
0.44	0.1510	0.1464	0.1459	0.1434	0.1408	0.1383	0.1358	0.1332	0.1307	0.1282	0.1257	0.55
0.45	0.1257	0.1231	0.1206	0.1181	0.1166	0.1130	0.1105	0.1080	0.1055	0.1030	0.1004	0.54
0.46	0.1004	0.0979	0.0954	0.0929	0.0904	0.0878	0.0853	0.0828	0.0803	0.0778	0.0753	0.53
0.47	0.0753	0.0728	0.0702	0.0677	0.0652	0.0627	0.0602	0.0577	0.0552	0.0527	0.0502	0.52
0.48	0.0502	0.0476	0.0451	0.0426	0.0401	0.0376	0.0351	0.0326	0.0301	0.0276	0.0251	0.51
0.49	0.0251	0.0226	0.0201	0.0175	0.0150	0.0125	0.0100	0.0075	0.0050	0.0025	0.0000	0.50
	0.010	0.009	0.008	0.007	0.006	0.005	0.004	0.003	0.002	0.001	0.000	p

ملحق رقم(2): جـــدول توزيـــــع كاي تربيـــــع

	$x^2_{0.005}$	$x^2_{0.01}$	$x^2_{0.025}$	$x^2_{0.05}$	$x^2_{0.10}$	$x^2_{0.25}$	$x^2_{0.50}$	$x^2_{0.75}$	$x^2_{0.90}$	$x^2_{0.95}$	$x^2_{0.975}$	$x^2_{0.99}$	$x^2_{0.995}$	$x^2_{0.999}$
1	0.0000	0.0002	0.0010	0.0089	0.0158	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.8
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.108	0.211	0.575	1.89	2.77	4.61	5.99	7.33	9.21	10.6	13.8
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.8	12.8	16.3
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9	18.5
5	0.412	0.554	0.881	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	16.1	16.7	20.5
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5	22.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.88	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3	24.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.67	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0	26.1
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6	27.9
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.84	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2	29.6
11	2.60	3.05	8.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8	31.3
12	3.07	3.57	4.40	5.28	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.8	26.2	28.3	32.9
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.8	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8	34.5
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.8	36.1
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	37.7
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.81	11.9	15.8	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	39.3
17	5.70	6.41	7.66	8.67	10.1	12.8	16.8	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	40.8
18	6.26	7.01	8.23	9.89	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.6	34.8	37.2	42.3
19	6.84	7.68	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	43.8
20	7.48	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	45.3
21	8.08	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	88.9	41.4	46.8
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	48.3
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	49.7
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	51.2
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	52.6
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.8	54.1
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	55.5
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.8	51.0	56.9
29	13.1	14.8	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3	58.8
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.8	43.8	47.0	50.9	53.7	59.7
40	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	33.7	39.3	45.6	51.8	55.8	59.8	63.7	66.8	73.4
50	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	42.9	49.3	56.8	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5	86.7
60	35.5	37.5	40.5	43.2	46.5	52.3	59.3	67.0	74.4	79.1	88.3	88.4	92.0	99.6
70	43.3	45.4	48.8	51.7	55.3	61.7	69.3	77.6	85.5	90.5	95.0	100	104	112
80	51.2	53.5	57.2	60.4	64.3	71.1	79.3	88.1	96.6	102	107	112	116	125
90	59.2	61.8	65.6	69.1	73.8	80.6	89.3	98.6	108	113	118	124	128	137
100	67.3	70.1	74.2	77.9	82.4	90.1	99.3	109	118	124	130	136	140	149

ملحق رقم(3): جدول تــوزيــــع ستيــــودنت

	$t_{0.55}$	$t_{0.60}$	$t_{0.70}$	$t_{0.75}$	$t_{0.80}$	$t_{0.90}$	$t_{0.95}$	$t_{0.975}$	$t_{0.99}$	$t_{0.995}$
1	0.158	0.325	0.727	1.000	1.376	3.08	6.31	12.71	31.82	63.66
2	0.142	0.289	0.617	0.816	1.061	1.89	2.92	4.30	6.96	9.92
3	0.137	0.277	0.584	0.765	0.978	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84
4	0.134	0.271	0.569	0.741	0.941	1.58	2.13	2.78	3.75	4.60
5	0.132	0.267	0.559	0.727	0.920	1.48	2.02	2.57	3.36	4.03
6	0.131	0.265	0.553	0.718	0.906	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71
7	0.130	0.263	0.549	0.711	0.896	1.42	1.90	2.36	3.00	3.50
8	0.130	0.262	0.546	0.706	0.889	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36
9	0.129	0.261	0.543	0.703	0.888	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25
10	0.129	0.260	0.542	0.700	0.879	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17
11	0.129	0.260	0.540	0.697	0.876	1.36	1.80	2.20	2.72	3.11
12	0.128	0.259	0.539	0.695	0.873	1.36	1.78	2.18	2.68	3.06
13	0.128	0.259	0.538	0.694	0.870	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01
14	0.128	0.258	0.537	0.692	0.868	1.34	1.76	2.14	2.62	2.98
15	0.128	0.258	0.536	0.691	0.866	1.34	1.75	2.13	2.60	2.95
16	0.128	0.258	0.535	0.690	0.865	1.34	1.75	2.12	2.58	2.92
17	0.128	0.257	0.534	0.689	0.863	1.33	1.74	2.11	2.57	2.90
18	0.127	0.257	0.534	0.688	0.862	1.33	1.73	2.10	2.55	2.88
19	0.127	0.257	0.533	0.688	0.861	1.33	1.73	2.09	2.54	2.86
20	0.127	0.257	0.533	0.687	0.860	1.32	1.72	2.09	2.53	2.84
21	0.127	0.257	0.532	0.686	0.859	1.32	1.72	2.08	2.52	2.83
22	0.127	0.256	0.532	0.686	0.858	1.32	1.72	2.07	2.51	2.82
23	0.127	0.256	0.532	0.685	0.858	1.32	1.71	2.07	2.50	2.81
24	0.127	0.256	0.531	0.685	0.857	1.32	1.71	2.06	2.49	2.80
25	0.127	0.256	0.531	0.684	0.856	1.32	1.71	2.06	2.48	2.79
26	0.127	0.256	0.531	0.684	0.856	1.32	1.71	2.06	2.48	2.78
27	0.127	0.256	0.531	0.684	0.855	1.31	1.70	2.05	2.47	2.77
28	0.127	0.256	0.530	0.683	0.855	1.31	1.70	2.05	2.47	2.76
29	0.127	0.256	0.530	0.683	0.854	1.31	1.70	2.04	2.46	2.76
30	0.127	0.256	0.530	0.683	0.854	1.31	1.70	2.04	2.46	2.75
40	0.126	0.255	0.529	0.681	0.851	1.30	1.68	2.02	2.42	2.70
60	0.126	0.254	0.527	0.679	0.848	1.30	1.67	2.00	2.39	2.66
120	0.126	0.254	0.526	0.677	0.845	1.29	1.66	1.98	2.36	2.62
∞	0.126	0.253	0.524	0.674	0.842	1.28	1.645	1.96	2.33	2.58

ملحق رقم(4): جــــدول توزيـــــع فيــــشر

$$p = 0.95$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.98
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.70	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.80
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.18
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.43	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

ملحق رقم(4): جـــدول توزيـــــع فيـــشر

$$p = 0.99$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4050	5000	5403	5625	5764	5859	5923	5981	6023	6056	6106	6157	62.09	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
3	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	27.1	26.9	26.7	26.6	26.5	26.4	26.3	26.2	26.1
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.4	14.2	14.0	13.9	13.8	13.7	13.7	13.6	13.5
5	16.8	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.48	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.70	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	3.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.68	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.48	4.10	3.87	3.70	3.66	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.56	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.82	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

قائمة المراجع:

أولا: المراجع باللغة العربية

1. أحمد عبد السميع طبية .**مبادئ الاحصاء**. الطبعة الأولى، دار البداية للنشر، عمان: الأردن، 2008.
2. أماني موسى محمد . **التحليل الإحصائي للبيانات**. الطبعة الأولى، مركز تطوير الدراسات العليا والبحوث كلية الهندسة لجامعة القاهرة، القاهرة: مصر، 2007.
3. بوعظم كمال. **الإحصاء الإستدلالي من الجانب النظري والتطبيقي**. دار زهران، عمان: الأردن، 2008.
4. جبار عبد مضحي. **مقدمة في نظرية الإحتمالات**. الطبعة الأولى، دار المسيرة للنشر والتوزيع، عمان: الأردن، 2011.
5. جمال رشيد الكحلوت. **مبادئ نظرية العينات**. مكتبة الفريد الالكترونية، 2003.
6. جمال محمد شاكر محمد .**المرشد في التحليل الاحصائي للبيانات باستخدام SPSS**.الطبعة الأولى، الدار الجامعية للنشر، الاسكندرية: مصر، 2005.
7. جميل أحمد .**أساليب المعاينة، القياس وتحليل البيانات**. المركز الجامعي بويرة.
8. حسن ياسين طعمة وإيمان حسين حنوش. **الإحصاء الاستدلالي**. الطبعة الأولى، دار الصفاء للنشر والتوزيع، عمان: الأردن، 2018.
9. ديفيد جيه هاند. **علم الاحصاء: مقدمة صغيرة جدا**. ترجمة: أحمد شكل، الطبعة الأولى، مؤسسة هنداوي للنشر، مصر، 2016.
10. سهير فهمي حجازي ومحمود الدريني .**الاحصاء التطبيقي**. الشركة المصرية لإعادة التأمين، مصر، 2004.
11. شبيجل وآخرون. **الإحتمالات والإحصاء: ملخصات شوم إيزي**. الدار الدولية للإستثمارات الثقافية، مصر، د ت ن.
12. عابد العبدلي. **مباديء الإحصاء**. متوفرة على الموقع:http://uqu.edu.sa/staff/ar/4180200
13. عزيز مهدي عابد الشماري. **إحصاء متقدم: التوزيعات الاحتمالية المستمرة**. مجموعة محاضرات في مقياس الإحصاء، 2015.
14. علي أحمد السقاف. **الاحصاء الوصفي والاستدلالي**. الطبعة الأولى، إصدار المركز الديمقراطي العربي، برلين: ألمانيا، 2020.
15. على عبد الزهرة حسن. **االحصاء الحيوي-1** .2019-2020، ممجموعة محاضرات متوفرة على الموقع: https://faculty.uobasrah.edu.iq › uploads.
16. عماد توماكرش وآخرون. **علم الإحصاء**. العراق، هيئة التعليم التقني، 2014.
17. فراس رشاد السامرائي. **الاحصاء واختبارات التشخيص الطبية**. كلية الطب البيطري لجامعة بغداد، 2015.

18. محمود الدريني .**محاضرات في الاحصاء الاستدلالي**.

19. مركز الاحصاء أبو ضبي. **دليل المعاينة الإحصائية: أدلة المنهجية والجودة، دليل رقم (1)**، متوفر على الموقع:
www.scad.ae

20. مقيدش نزيهة، **أهمية أسلوب المعاينة في الدراسات الإحصائية دراسة تطبيقية حول الحوكمة في الجامعة الجزائرية من خلال سبر للآراء جامعة فرحات عباس–سطيف–**، مذكرة ماجستير ، جامعة سطيف، 2009-2010.

21. نافذ محمد بركات .**توزيع المعاينة**. الجامعة الاسلامية غزة.

22. وليد عبد الرحمن الفرا. **مبادىء علم الاحصاء**. المملكة العربية السعودية، 2004.

ثانيا: المراجع باللغة الأجنبية

1. DODGE Yadolah**, Premiers pas en statistique**, springer verlag,France, 2003.
2. François Cottet-Emard .**probabilités et tests d'hypothèse : cours et exercices corrigés**. 1er édition, Belgique ,2014.
3. GIARD Vincent **, Statistique appliquée à la gestion**, 8ème Edition economica, paris, 2003.
4. GRAIS Bernard , **Méthodes statistiques : techniques statistiques 2** , 3eme édition, 2003.
5. Mathieu Rouaud. **Probabilités, statistiques et analyses multicritères**. 2013, cretive commons :boudiguen France.

فهرس الأشكال والجداول:

أولا: فهرس الأشكال

ثانيا: فهرس الجداول

فهرس المحتويات:

فهرس المحتويات: